La démonstration par récurrence

La démonstration par récurrence sert lorsqu'on veut démontrer qu'une propriété est vraie pour toutes les valeurs de n.
On appelle dans ce cas $\mathscr{P}_n$ la propriété en question pour la valeur (fixée) n.
On est ainsi amené à montrer que toutes les propriétés $\mathscr{P}_n$ (pour toutes les valeurs de n) sont vraies.

$\mathscr{P}_0\,?$ $\quad\mathscr{P}_1\,?$ $\quad\mathscr{P}_2\,?$ $\quad\mathscr{P}_3\,?$ $\quad\mathscr{P}_4\,?$ $\quad\ldots\ldots$

Exemple : Prenons un exemple simple pour illustrer le raisonnement par récurrence.

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(n\pi)$.
On veut montrer par récurrence la propriété :

« pour tout entier k on a : $u_k = (-1)^k$. »

Pour n'importe quel k entier on appelle $\mathscr{P}_k$ la propriété (à démontrer): « $u_k = (-1)^k$ ».
On peut à présent démontrer par récurrence que : « $u_k = (-1)^k$ pour tout entier k ».

La démonstration par récurrence se fait en trois étapes :

• ***Initialisation :***
on vérifie que la propriété est vraie pour la première valeur de n (souvent $n = 0$).
On vérifie donc que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$\mathscr{P}_0$ vraie $\quad\mathscr{P}_1\,?$ $\quad\mathscr{P}_2\,?$ $\quad\mathscr{P}_3\,?$ $\quad\mathscr{P}_4\,?$ $\quad\ldots\ldots$

Exemple : • *Initialisation :*
$u_0 = \cos(0) = 1$ et $(-1)^0 = 1$ donc $u_0 = (-1)^0$ et donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• ***Transmission :***
on démontre la propriété suivante : « si la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour un certain rang k (n'importe lequel) alors la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour le rang juste après c'est-à-dire pour le rang $k+1$ ».

$$\ldots\ldots \qquad \mathscr{P}_k \text{ vraie} \xrightarrow{\textit{transmission}} \mathscr{P}_{k+1}\,? \qquad \ldots\ldots$$

Exemple : • *Transmission :*
Si la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie (pour un certain k) montrons qu'alors $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie aussi :
On a $u_{k+1} = \cos\big((k+1)\pi\big) = \cos(k\pi+\pi) = \cos(k\pi)\cos(\pi) - \sin(k\pi)\sin(\pi)$. Par ailleurs $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$ donc $u_{k+1} = \cos(k\pi) \times (-1) - 0 = -\cos(k\pi)$.

De la propriété $\mathscr{P}_k$ supposée vraie on tire $\cos(k\pi) = (-1)^k$ donc $u_{k+1} = -1 \times (-1)^k = (-1)^{k+1}$ et ainsi la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
On a donc bien montré que <u>si</u> $\mathscr{P}_k$ était vraie <u>alors</u> $\mathscr{P}_{k+1}$ l'était aussi.

• ***<u>Conclusion :</u>***
les deux étapes précédentes permettent de conclure que la propriété est vraie pour tous les entiers n. En effet la propriété est vraie au rang 0 donc avec l'étape de transmission elle devient vraie au rang 1. On peut alors réappliquer l'étape de transmission au rang 1 et la propriété devient vraie au rang 2.
En réappliquant l'étape de transmission de proche de proche, il suit que la propriété est vraie pour tous les entiers n.

$$\mathscr{P}_0 \text{ vraie} \quad \overset{\ldots\ldots}{} \quad \mathscr{P}_1 \text{ vraie} \xrightarrow{\textit{transmission}} \mathscr{P}_2\,? \quad \mathscr{P}_3\,? \quad \mathscr{P}_4\,? \quad \ldots\ldots$$

$$\mathscr{P}_0 \text{ vraie} \quad \mathscr{P}_1 \text{ vraie} \quad \mathscr{P}_2 \text{ vraie} \quad \overset{\ldots\ldots}{} \quad \mathscr{P}_3 \text{ vraie} \xrightarrow{\textit{transmission}} \mathscr{P}_4\,? \quad \ldots\ldots$$

Exemple : • *Conclusion :*
On a ainsi pour tout entier n l'égalité : $\cos(n\pi) = (-1)^n$.