

La démonstration par récurrence

La **démonstration par récurrence** sert lorsqu'on veut démontrer qu'une propriété est vraie pour toutes les valeurs de n .

On appelle dans ce cas \mathcal{P}_n la propriété en question pour la valeur (fixée) n .

On est ainsi amené à montrer que toutes les propriétés \mathcal{P}_n (pour toutes les valeurs de n) sont vraies.

$\mathcal{P}_0?$ $\mathcal{P}_1?$ $\mathcal{P}_2?$ $\mathcal{P}_3?$ $\mathcal{P}_4?$

Exemple : Prenons un exemple simple pour illustrer le raisonnement par récurrence.

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(n\pi)$.

On veut montrer par récurrence la propriété :

$$\text{« pour tout entier } k \text{ on a : } u_k = (-1)^k \text{. »}$$

Pour n'importe quel k entier on appelle \mathcal{P}_k la propriété (à démontrer): « $u_k = (-1)^k$ ».

On peut à présent démontrer par récurrence que : « $u_k = (-1)^k$ pour tout entier k ».

La **démonstration par récurrence** se fait en trois étapes :

• **Initialisation :**

on vérifie que la propriété est vraie pour la première valeur de n (souvent $n = 0$).

On vérifie donc que \mathcal{P}_0 est vraie.

\mathcal{P}_0 vraie $\mathcal{P}_1?$ $\mathcal{P}_2?$ $\mathcal{P}_3?$ $\mathcal{P}_4?$

Exemple : • **Initialisation :**

$$u_0 = \cos(0) = 1 \text{ et } (-1)^0 = 1 \text{ donc } u_0 = (-1)^0 \text{ et donc la propriété } \mathcal{P}_0 \text{ est vraie.}$$

• **Transmission :**

on démontre la propriété suivante : « si la propriété \mathcal{P} est vraie pour un certain rang k (n'importe lequel) alors la propriété \mathcal{P} est vraie pour le rang juste après c'est-à-dire pour le rang $k + 1$ ».



Exemple : • **Transmission :**

Si la propriété \mathcal{P}_k est vraie (pour un certain k) montrons qu'alors \mathcal{P}_{k+1} est vraie aussi :
 On a $u_{k+1} = \cos((k+1)\pi) = \cos(k\pi + \pi) = \cos(k\pi)\cos(\pi) - \sin(k\pi)\sin(\pi)$. Par ailleurs $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$ donc $u_{k+1} = \cos(k\pi) \times (-1) - 0 = -\cos(k\pi)$.

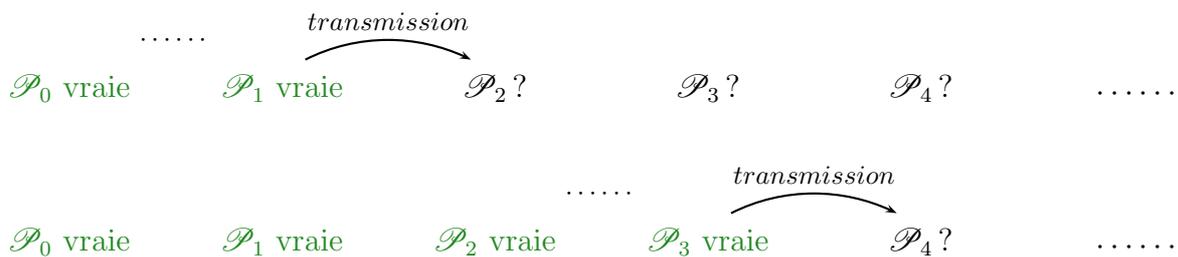
De la propriété \mathcal{P}_k supposée vraie on tire $\cos(k\pi) = (-1)^k$ donc $u_{k+1} = -1 \times (-1)^k = (-1)^{k+1}$ et ainsi la propriété \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

On a donc bien montré que si \mathcal{P}_k était vraie alors \mathcal{P}_{k+1} l'était aussi.

• **Conclusion :**

les deux étapes précédentes permettent de conclure que la propriété est vraie pour tous les entiers n . En effet la propriété est vraie au rang 0 donc avec l'étape de transmission elle devient vraie au rang 1. On peut alors réappliquer l'étape de transmission au rang 1 et la propriété devient vraie au rang 2.

En réappliquant l'étape de transmission de proche de proche, il suit que la propriété est vraie pour tous les entiers n .



Exemple : • **Conclusion :**

On a ainsi pour tout entier n l'égalité : $\cos(n\pi) = (-1)^n$.