La démonstration par récurrence

Dans toute la suite n appartient à $\mathbb{N}$.
La démonstration par récurrence sert lorsqu'on veut démontrer qu'une propriété, dépendant de n, est vraie pour toutes les valeurs de n.
On appelle dans ce cas $\mathscr{P}_n$ la propriété en question.
On est ainsi amené à montrer que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie **pour toutes les valeurs de n**.

$\mathscr{P}_0$? $\mathscr{P}_1$? $\mathscr{P}_2$? $\mathscr{P}_3$? $\mathscr{P}_4$? ......

Exemple : Prenons un exemple simple pour illustrer le raisonnement par récurrence.

On veut montrer par récurrence la propriété :

$$\text{« pour tout entier } n \text{ on a : } \quad 0+1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.\text{ »}$$

Pour n'importe quel entier n on appelle $\mathscr{P}_n$ la propriété (à démontrer): « $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ».
On peut à présent démontrer par récurrence que : « $0+1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier n ».

La démonstration par récurrence se fait en trois étapes :

• ***Initialisation* :**
on vérifie que la propriété est vraie pour la première valeur de n *(souvent $n=0$)*.
On vérifie donc que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$\mathscr{P}_0$ vraie $\mathscr{P}_1$? $\mathscr{P}_2$? $\mathscr{P}_3$? $\mathscr{P}_4$? ......

Exemple : • *Initialisation* :
ici $n=0$ donc $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{0\times(0+1)}{2}=0$ et ainsi la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• ***Hérédité* :**
on démontre la propriété suivante : « si la propriété est vraie pour un certain rang k *(n'importe lequel)* alors la propriété est vraie pour le rang juste après c'est-à-dire pour le rang $k+1$ ».

$$\cdots\cdots \quad \mathscr{P}_k \text{ vraie} \xrightarrow{\text{transmission}} \mathscr{P}_{k+1}\,? \quad \cdots\cdots$$

La propriété se transmet de la valeur de l'indice k à la valeur de l'indice $k+1$.
On dit que la propriété est *héréditaire*.

Exemple : • *Transmission* :

Si la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie *(pour un certain k)* montrons qu'alors $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie aussi .

On sait (par hypothèse de récurrence) : $0+1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

On veut démontrer que : $0+1+2+\cdots+(k+1)=\dfrac{(k+1)\big((k+1)+1\big)}{2}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

On a $0+1+2+\cdots+(k+1)=0+1+2+\cdots+k+(k+1)$. Par ailleurs d'après l'hypothèse de récurrence $0+1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ donc $0+1+2+\cdots+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)$.

On a ensuite $\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{2(k+1)}{2}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ et donc il suit que

$0+1+2+\cdots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est ainsi vraie.

On a donc bien montré que si $\mathscr{P}_k$ est vraie alors $\mathscr{P}_{k+1}$ l'est aussi.

• **Conclusion :**

les deux étapes précédentes permettent de conclure que la propriété est vraie pour tous les entiers n. En effet la propriété est vraie au rang 0 donc avec l'étape d'hérédité elle devient vraie au rang 1. On peut alors réappliquer l'étape d'hérédité au rang 1 et la propriété devient vraie au rang 2.

En réappliquant l'étape d'hérédité de proche de proche, il suit que la propriété est vraie pour tous les entiers n.

......

$\mathscr{P}_0$ vraie $\quad$ $\mathscr{P}_1$ vraie $\xrightarrow{transmission}$ $\mathscr{P}_2$? $\quad$ $\mathscr{P}_3$? $\quad$ $\mathscr{P}_4$? $\quad$ ......

......

$\mathscr{P}_0$ vraie $\quad$ $\mathscr{P}_1$ vraie $\quad$ $\mathscr{P}_2$ vraie $\quad$ $\mathscr{P}_3$ vraie $\xrightarrow{transmission}$ $\mathscr{P}_4$? $\quad$ ......

Exemple : • *Conclusion* :

On a ainsi pour tout entier n l'égalité : $0+1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.