

La démonstration par récurrence

Dans toute la suite n appartient à \mathbb{N} .

La **démonstration par récurrence** sert lorsqu'on veut démontrer qu'une propriété, dépendant de n , est vraie pour toutes les valeurs de n .

On appelle dans ce cas \mathcal{P}_n la propriété en question.

On est ainsi amené à montrer que la propriété \mathcal{P}_n est vraie **pour toutes les valeurs de n** .

$\mathcal{P}_0?$ $\mathcal{P}_1?$ $\mathcal{P}_2?$ $\mathcal{P}_3?$ $\mathcal{P}_4?$

Exemple : Prenons un exemple simple pour illustrer le raisonnement par récurrence.

On veut montrer par récurrence la propriété :

$$\text{« pour tout entier } n \text{ on a : } 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{. »}$$

Pour n'importe quel entier n on appelle \mathcal{P}_n la propriété (à démontrer): « $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

On peut à présent démontrer par récurrence que : « $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier n ».

La **démonstration par récurrence** se fait en trois étapes :

• **Initialisation :**

on vérifie que la propriété est vraie pour la première valeur de n (*souvent $n = 0$*).

On vérifie donc que \mathcal{P}_0 est vraie.

\mathcal{P}_0 vraie $\mathcal{P}_1?$ $\mathcal{P}_2?$ $\mathcal{P}_3?$ $\mathcal{P}_4?$

Exemple : • **Initialisation :**

$$\text{ici } n = 0 \text{ donc } \frac{n(n+1)}{2} = \frac{0 \times (0+1)}{2} = 0 \text{ et ainsi la propriété } \mathcal{P}_0 \text{ est vraie.}$$

• **Hérédité :**

on démontre la propriété suivante : « si la propriété est vraie pour un certain rang k (*n'importe lequel*) alors la propriété est vraie pour le rang juste après c'est-à-dire pour le rang $k + 1$ ».



La propriété se transmet de la valeur de l'indice k à la valeur de l'indice $k + 1$.

On dit que la propriété est **héréditaire**.

Exemple : • *Transmission :*

Si la propriété \mathcal{P}_k est vraie (pour un certain k) montrons qu'alors \mathcal{P}_{k+1} est vraie aussi .

On sait (par hypothèse de récurrence) : $0 + 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

On veut démontrer que : $0 + 1 + 2 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

On a $0 + 1 + 2 + \dots + (k+1) = 0 + 1 + 2 + \dots + k + (k+1)$. Par ailleurs d'après l'hypothèse de récurrence $0 + 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ donc $0 + 1 + 2 + \dots + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$.

On a ensuite $\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ et donc il suit que

$$0 + 1 + 2 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} .$$

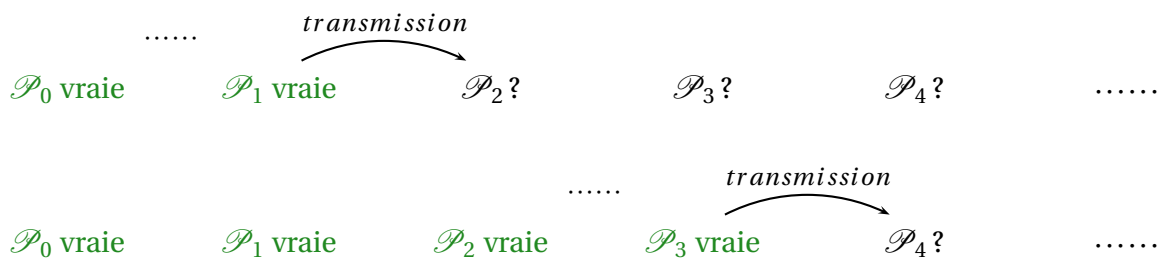
La propriété \mathcal{P}_{k+1} est ainsi vraie.

On a donc bien montré que si \mathcal{P}_k est vraie alors \mathcal{P}_{k+1} l'est aussi.

• *Conclusion :*

les deux étapes précédentes permettent de conclure que la propriété est vraie pour tous les entiers n . En effet la propriété est vraie au rang 0 donc avec l'étape d'hérédité elle devient vraie au rang 1. On peut alors réappliquer l'étape d'hérédité au rang 1 et la propriété devient vraie au rang 2.

En réappliquant l'étape d'hérédité de proche de proche, il suit que la propriété est vraie pour tous les entiers n .



Exemple : • *Conclusion :*

On a ainsi pour tout entier n l'égalité : $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.