CHAPITRE 3 : BARYCENTRES

I. BARYCENTRE DE 2 POINTS PONDERES:

1- Définition

La notation $(A;\alpha)$ où A est un point et α un réel signifie que le point A est affecté du coefficient α. On parle de **point pondéré**.
Soient $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ deux points pondérés tels que $\alpha+\beta\neq 0$; On appelle **barycentre** de ces deux points, le point G, défini par : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

On dit que « G est le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ »
Ou que « G est le barycentre du système $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ »
On note : $G=bar\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$

2- Propriétés

Propriété 1 :Expression de $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

Soit G le barycentre des points $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ où $\alpha+\beta\neq 0$. Par définition, on a donc :
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. Donc : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$ grâce à la relation de Chasles
d'où $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ce qui implique que $\boxed{\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$ car $\alpha+\beta\neq 0$

Le point G appartient à la droite (AB) et a pour abscisse $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB}\right)$.

Remarque : Si α et β sont de même signe, alors : G appartient au segment [AB].

exemple : Soients A et B 2 points du pla,n tels que AB = 10 cm. Construire :
G_1 barycentre de $(A;2)$ et de $(B;3)$ et G_2 barycentre de $(A;3)$ et de $(B;-1)$

Propriété 2 : Homogénéité

Soit G le barycentre des points $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ où $\alpha+\beta\neq 0$.
G est défini par $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
Soit k un réel non nul ;
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Rightarrow k\left(\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}\right)=k\vec{0}\Rightarrow k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{AG}=\dfrac{k\beta}{k(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}}$

Le barycentre de deux points ne change pas lorsqu'on multiplie les 2 coefficients par un même nombre réel non nul.

Propriété 3 : Isobarycentre

Le barycentre de 2 points A et B distincts affectés du même coefficient non nul est le milieu du segment [AB]. On l'appelle l'**isobarycentre** de A et de B.

3- Autre relation vectorielle :

Soit G le barycentre des points $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ où $\alpha+\beta \neq 0$.

Par définition, on a donc : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Soit M un point quelconque du plan, la relation de Chasles nous donne :

$\alpha\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}\right)+\beta\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0} \Rightarrow [\alpha+\beta]\overrightarrow{GM}+\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

et donc : $[\alpha+\beta]\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

On obtient donc enfin : $\boxed{\overrightarrow{MG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}}$

Applications :

- Choix judicieux du point M :

  Pour M = G, on retrouve la définition : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

  Pour M = A, on retrouve la propriété 1.

- Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

  A et B ont pour coordonnées $(x_A;y_A)$et $(x_B;y_B)$.

  Quelles sont les coordonnées du point G ?

  Pour M = O, on obtient $\boxed{\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}}$

  Et donc : $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ et $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$

  Exemple : $A(4;2)$ et $B(1;-4)$

  Quelle sont les coordonnées de G barycentre de $(A;1)$et$(B;2)$?

  Réponse : G (2 ; -2)

II. BARYCENTRE DE 3 POINTS PONDERES :

1- Extension de la définition et des propriétés :

Soient $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ trois points pondérés tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$; On appelle **barycentre** de ces trois points, le point G, défini par :
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Propriété 1 :Expression de $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$

$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}}$$

exemple : Soient A, B et C 3 points distincts du plan. Construire le point G barycentre du système : $\{(A;2),(B;3),(C;5)\}$.

Propriété 2 : Homogénéité

Le barycentre de trois points ne change pas lorsqu'on multiplie les 3 coefficients par un même nombre réel non nul.

Propriété 3 : Isobarycentre

L'isobarycentre de 3 points A, B et C distincts non alignés est défini par :
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Or cette relation caractérise le centre de gravité du triangle ABC.

Autre relation vectorielle :

Soit G le barycentre des points $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ où $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
On obtient après une démarche similaire à celle avec 2 points :

$$\boxed{\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}}$$