

## I. Vocabulaire

On parle d'**expérience aléatoire** dès qu'une expérience a plusieurs issues possibles et que celles-ci ne peuvent être ni prévues ni calculées.

**Exemple :** Le résultat du lancer d'un dé équilibré.

**Définition 1 :** On appelle **univers des possibles**, et on note  $\Omega$  l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire  $\mathcal{E}$ .

Un élément de  $\Omega$  est appelé **événement élémentaire**.

Un **événement** est un sous-ensemble (ou partie) de  $\Omega$ . L'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  des parties de  $\Omega$  est l'ensemble des événements liés à l'expérience aléatoire  $\mathcal{E}$ .

**Remarque :**  $\Omega$  est l'événement certain. Il est toujours réalisé.

$\emptyset$  est l'événement impossible. Il n'est jamais réalisé.

**Exemple :** Avec notre exemple on a  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Définition 2 :**

- L'événement «  $A$  ou  $B$  », noté  $A \cup B$  est obtenu en regroupant les événements élémentaires contenus dans  $A$  ou dans  $B$ .

- L'événement «  $A$  et  $B$  », noté  $A \cap B$  est obtenu en regroupant les événements élémentaires communs à  $A$  et  $B$ .

- L'**événement contraire** de  $A$ , noté  $\bar{A}$ , est composé des événements élémentaires qui ne sont pas contenus dans  $A$ .

**Définition 3 :** Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits **incompatibles** (ou disjoints) si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

### Fréquence d'un événement :

Soit  $A$  un événement lié à une expérience aléatoire  $\mathcal{E}$ .

Répetons  $n$  fois cette expérience. Soit  $n_A$  le nombre de réalisations de  $A$  lors de ces  $n$  répétitions.

La fréquence d'apparitions de  $A$  est :  $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ .

L'expérience montre que lorsque  $n$  devient de plus en plus grand,  $f_n(A)$  tend à se stabiliser autour d'un certain nombre  $p$ .

Ce nombre  $p$  s'appelle alors **probabilité** de l'événement  $A$  et se note  $P(A)$ .

**Propriétés des fréquences** (qui conduisent à la définition 4) :

1.  $f_n(\Omega) = 1$  car  $\Omega$  étant toujours réalisé on a  $n_\Omega = n$ .
2.  $f_n(A) \in [0; 1]$  car  $0 \leq n_A \leq n$ .
3. Si  $A$  et  $B$  sont incompatibles,  $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$  car  $n_{A \cup B} = n_A + n_B$ .

## II. Calcul des probabilités

**Définition 4 :** On appelle **probabilité** toute application  $P$  de  $\Omega$  vers  $[0; 1]$  telle que :

1.  $P(\Omega) = 1$ .
2. Pour tout événement  $A$  de  $\Omega$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
3. Si  $A$  et  $B$  sont incompatibles,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

**Remarque :** Dans la pratique on choisit bien sûr l'application  $P$  de manière à représenter au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

**Exemple :** Dans notre exemple on a ainsi  $P(\ll 1 \gg) = P(\ll 2 \gg) = P(\ll 3 \gg) = P(\ll 4 \gg) = P(\ll 5 \gg) = P(\ll 6 \gg) = \frac{1}{6}$ .

**Remarque :** La représentation des issues d'une expérience aléatoire  $\mathcal{E}$  ainsi que des probabilités associées est le plus souvent faite à l'aide d'un tableau à double entrée ou d'un arbre. (Voir les exos en TD.)

On a les propriétés calculatoires suivantes :

**Propriété 1 :**  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$  et  $P(\emptyset) = 0$ .

→ démonstration :

**Théorème 1 :** Pour tous événements  $A$  et  $B$ , on a :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

→ démonstration :

**Définition 5 :** On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires de  $\Omega$  ont la même probabilité.

S'il y a équiprobabilité :  $P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas possibles}}$ .

**Exemple :** C'est le cas dans notre exemple de lancer de dé.

## III. Variables aléatoires

### 1) Définitions

Il est parfois intéressant d'associer un nombre au résultat d'une expérience aléatoire :

**Définition 6 :** Soit  $\Omega$  l'univers associé à une expérience aléatoire, on appelle **variable aléatoire** toute fonction  $X$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple :** On lance à présent 2 dés cubiques équilibrés. Si le résultat obtenu en faisant la somme des deux dés est compris entre 6 et 9, nous perdons 1€, sinon, nous gagnons 1€.

Soit  $X$  la variable aléatoire associée à l'exemple précédent.

$X$  peut prendre les valeurs 1 et -1.

## 2) Loi de probabilité - Espérance - Variance

**Exemple :** Gagner 1€, correspond à l'événement ( $X = 1$ ). Ceci est réalisé lorsque l'événement  $\{(1,1)(1,2)(2,1)\dots\}$  est réalisé.

Donc la probabilité de «  $X = 1$  », notée  $P(X = 1)$  est  $\frac{16}{36}$  et  $P(X = -1)$  est  $\frac{20}{36}$ .

On remarque que  $P(X = -1) + P(X = 1) = 1$ .

**Définition 7 :** Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $\Omega$ .

Soit  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  l'ensemble des valeurs prises par  $X$  et  $p_i$  la probabilité de l'événement «  $X = x_i$  ».

On a alors :  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

On appelle **loi de probabilité** de  $X$  la fonction définie sur  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  qui à tout  $x_i$  associe le nombre  $P(X = x_i)$ .

On utilise une représentation à l'aide d'un tableau :

Valeurs de $X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P(X = x_i)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

**Définition 8 :** • On appelle **Espérance mathématique** de  $X$  le réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

• On appelle **Variance** de  $X$  le réel positif :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(x))^2 = \left( \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \right) - (E(x))^2.$$

• On appelle **Ecart-type** de  $X$  le réel positif :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Remarque :** • L'espérance représente une moyenne « théorique » de  $X$ , c'est la valeur moyenne qu'on peut espérer au bout d'un grand nombre de répétitions de l'expérience  $\mathcal{E}$ .

• L'écart-type représente la dispersion « théorique » des valeurs possibles autour de  $E(X)$ .

On préfère utiliser  $\sigma(X)$  plutôt que  $V(X)$  car il est *homogène* avec  $X$ .

**Exemple :** Dans notre exemple précédent on a la loi de probabilité :

Valeurs de $X$	-1	1
$P(X = x_i)$		

et on a  $E(X) = \dots\dots\dots$

$V(X) = \dots\dots\dots$

puis  $\sigma(X) = \dots$