Chap VIII :

Suites

I. Vocabulaire et définitions

1) Définitions

Définition 1 : Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $\begin{array}{l}\mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n\end{array}$.

La suite u est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).

Remarque : u_0 est appelé le premier terme, et de manière générale u_n est appelé le $(n+1)$-ième terme.

Définition 2 : En général, une suite est définie :

- Soit de manière explicite (on peut calculer u_n en fonction de n)
  Exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
  Cas particulier : $u_n = f(n)$ avec f une fonction de type connue.
  Exemple : $u_n = \sqrt{n}$.

- Soit par récurrence (on calcule u_n de proche en proche)
  Exemple : $u_0 = 2$ est donné et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ alors $u_1 = 3, u_2 = 5 \ldots$

2) Sens des variations

Définition 3 :
- (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- (u_n) est décroissante si et seulement si, pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- (u_n) est monotone si et seulement si (u_n) est croissante ou décroissante.

3) Méthodes

Pour étudier les variations d'une suite, on peut :
- Comparer u_{n+1} et u_n.
- Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si $u_n > 0$ pour tout n, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
- Si $u_n = f(n)$, utiliser les variations de $x \mapsto f(x)$.

4) Suites bornées

Définition 4 :
- (u_n) est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.
- (u_n) est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n, $u_n \geqslant m$.
- (u_n) est bornée si (u_n) est à la fois majorée ou minorée.

II. Suites arithmétiques

1) Définition

Définition 5 : On appelle suite arithmétique toute suite (u_n) telle que pour tout entier n on ait $u_{n+1} = u_n + r$.
r est appelé la raison de la suite.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n$ est arithmétique.

Propriété 1 : En fait si la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r on a pour tout n : $u_n = u_0 + nr$.
$\longrightarrow$ *démonstration* : En TD avec le raisonnement par récurrence.

Propriété 2 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors :

- si $r < 0$, la suite (u_n) est une suite décroissante ;
- si $r = 0$, la suite est constante ;
- si $r > 0$, la suite (u_n) est une suite croissante.

$\longrightarrow$ *démonstration* :

2) Somme de termes consécutifs

Propriété 3 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On définit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ alors on a $S_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$.
$\longrightarrow$ *démonstration* :

Exemple : On a l'exemple fondamental : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

III. Suites géométiques

1) Définition

Définition 6 : On appelle suite géométique toute suite (v_n) telle que pour tout entier n on ait $v_{n+1} = q \times v_n$.
q est appelé la raison de la suite.

Propriété 4 : En fait si la suite (v_n) est géométique de premier terme v_0 et de raison q on a pour tout n : $v_n = v_0 q^n$.
$\longrightarrow$ *démonstration* : En TD avec le raisonnement par récurrence.

Propriété 5 : Si (v_n) est une suite géométique de raison q alors :

- si $q > 1$: la suite (v_n) est une suite décroissante si $v_0 < 0$ et (v_n) est une suite croissante si $v_0 > 0$;
- si $0 < q < 1$: la suite (v_n) est une suite croissante si $v_0 < 0$ et (v_n) est une suite décroissante si $v_0 > 0$;
- sinon la suite (v_n) n'est ni croissante ni décroissante.

  $\longrightarrow$ *démonstration :*

2) Somme de termes consécutifs

Propriété 6 :

Soit (v_n) une suite géométique de raison q.

On définit $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} + v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ alors

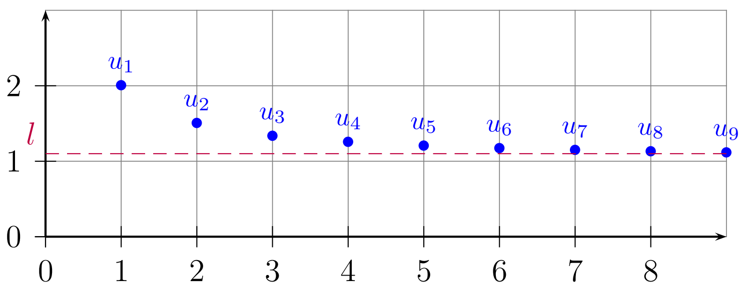
on a $S_n = v_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

$\longrightarrow$ *démonstration :*

IV. Convergence des suites

1) Définition

Définition 7 : On dit qu'une suite (u_n) est convergente vers un <u>nombre</u> l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
Dans le cas contraire on dit que la suite (u_n) est divergente
(si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ ou si la suite (u_n) n'a pas de limite.)



Remarque : De manière analogue on peut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si tout intervalle du type $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarque : Les théorèmes sur la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient énoncés pour les fonctions restent valables pour toutes les suites.

2) Propriétés

Théorème 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[b;+\infty[$ et soit (u_n) définie par $u_n = f(n)$, alors :

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors (u_n) converge vers l.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$\longrightarrow$ *démonstration* : Admis

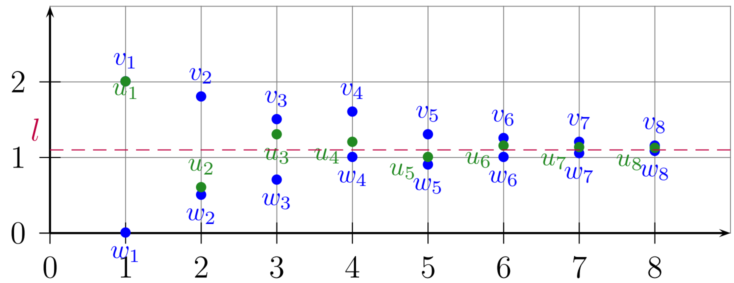
Exemple : On a par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Théorème 2 : Théorème des gendarmes

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) et un nombre l tels que, à partir d'un certain rang, on ait $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$.

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

$\longrightarrow$ *démonstration* :



3) Cas des suites géométriques

Théorème 3 : On considère une suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 non nul (sinon la suite est toujours nulle) et de raison q.

- si $q > 1$ et $v_0 > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$;
- si $q > 1$ et $v_0 < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$;
- si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$;
- et si $q = 1$ (v_n) est constante égale à v_0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0$.

$\longrightarrow$ *démonstration* : En DM.