Chap VII : Application de la dérivation

I. Sens de variations

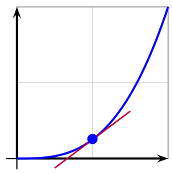
On dispose d'un théorème fondamental pour l'étude des fonctions, il fait un lien entre le signe de la fonction dérivée f' et le sens de variations de la fonction f.

Théorème 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.
- Si $f' > 0$ sur I, sauf en un nombre fini de réels, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I, sauf en un nombre fini de réels, alors f est strictement décroissante sur I.

$\longrightarrow$ *démonstration* : Admis.

Remarque : Ce résultat ne choque pas l'intuition car si en un point de la courbe $\big(x_0; f(x_0)\big)$ le nombre dérivé $f'(x_0)$ est positif alors autour de ce point la fonction est croissante car c'est le coefficient directeur de la tangente. Et donc si la dérivée est positive sur I, f est bien croissante sur I.



Dans la pratique, pour déterminer les variations d'une fonction f, on calcule sa dérivée f' on en cherche le signe (en factorisant le plus possible f') et on découpe son ensemble de définition en intervalles sur lesquels f' est de signe constant. On peut alors mettre les résultats dans le tableau de variations de f.

Exemple : Prenons la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ on a $f'(x) = 2x$ et donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

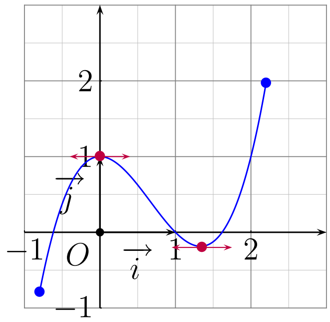
II. Extrema locaux

1) définition

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit c un réel intérieur à I.
(c distinct des bornes de I).

- On dit que f présente un maximum local en c si $f(c)$ est le maximum de la restriction de f à un intervalle ouvert contenant c.
- On dit que f présente un minimum local en c si $f(c)$ est le minimum de la restriction de f à un intervalle ouvert contenant c.
- Un extremum local est un maximum local ou un minimum local.

Remarque : L'exemple ci-contre présente un minimum et un maximum globaux (qui sont aux bornes de l'intervalle de définition) ainsi qu'un minimum et un maximum locaux.
Il faut bien distinguer les deux types d'extrema.



2) une condition nécessaire

Théorème 2 : Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.
$\longrightarrow$ *démonstration :*

Remarque : Cette propriété sert à trouver des minima ou des maxima (locaux) pour certains problèmes qu'on veut étudier.

Remarque : Cette propriété n'est pas vraie dans les deux sens, ce n'est qu'une *implication* .
(son symbole mathématique est $\Longrightarrow$)
En effet, par exemple, la fonction cube $f(x) = x^3$ est telle que $f'(0) = 0$ mais malgré cela f n'admet pas d'extremum local en 0.