Chap I :

Polynômes

I. Trinôme du second degré

Définition 1 : Un trinôme du second degré est une expression de la forme ax^2+bx+c, avec $a \neq 0$.

Remarque : Un trinôme du second degré est défini sur $\mathbb{R}$.

Nous allons déterminer une technique pour résoudre ***toutes*** les équations du type $ax^2+bx+c=0$ appelées équation du second degré.

1) Forme canonique du trinôme

On sait résoudre les équations suivantes :
- $x^2-3=0$
- $(x+2)^2-5=0$
- $3\left((x+1)^2-\dfrac{2}{3}\right)=0$

En fait on a $3\left((x+1)^2-\dfrac{2}{3}\right)=3x^2+6x+1$ mais les deux formes ne sont pas toutes les deux aussi pratique pour résoudre $3x^2+6x+1=0$ qui est souvent la forme sous laquelle l'équation apparaît. La forme $3\left((x+1)^2-\frac{2}{3}\right)$ s'appelle la forme canonique du trinôme $3x^2+6x+1$.

L'idée intéressante c'est qu'on peut toujours résoudre une équation du second degré lorsque le trinôme est sous forme canonique et on peut toujours mettre un trinôme sous forme canonique.

Propriété 1 : On a $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

2) Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$

Pour résoudre $ax^2+bx+c=0$ c'est donc le signe de b^2-4ac qui nous intéresse.

Définition 2 : Soit $P(x)=ax^2+bx+c$, on appelle discriminant de $P(x)=0$, le nombre $\Delta=b^2-4ac$.

On a alors :

$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}=0$ car $a\neq 0$.

- Si $\Delta<0$, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$ donc l'équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta=0$, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$ d'où $x=-\dfrac{b}{2a}$ est racine double.
- Si $\Delta>0$, $\Delta=\sqrt{\Delta^2}$ d'où $P(x)=0\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\sqrt{\Delta^2}}{4a^2}=0$ soit $\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$ donc $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont les solutions sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1 : Soit S l'ensemble des solutions de $ax^2+bx+c=0$.
Si $\Delta<0$, $S=\emptyset$.
Si $\Delta=0$, $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
Si $\Delta>0$, $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,;\,\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Remarque : Si a et c sont de signes contraires, $\Delta>0$.

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes :
- $x^2-3x+2=0$,
- $2x^2+4x+2=0$,
- $-2x^2-3x+4=0$,
- $-3x^2+2x-2=0$

$\longrightarrow$ *parler des équations bicarrés et irrationnelles*

3) Factorisation et racines

Proposition 1 : (HP) Si le trinôme ax^2+bx+c admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales dans le cas d'une racine double) alors, $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $P=x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Exercice 2 : On peut le vérifier sur l'exemple $x^2-3x+2=0$

On a également une sorte de réciproque :

Proposition 2 : (HP) Si deux nombres ont pour somme S et pour produit P alors ils sont solutions de l'équation $X^2-SX+P=0$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Exercice 3 : Déterminer les valeurs possibles pour deux nombres x et y dont la somme fait 5 et le produit 3.

On peut toujours factoriser un trinôme qui a des racines :

Théorème 2 : Si le trinôme ax^2+bx+c admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales) alors, $\forall x\in\mathbb{R}$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Exercice 4 : On peut le vérifier sur l'exemple $-2x^2-3x+4=0$.

4) Signe du trinôme

Dans chacun des trois cas pour Δ on peut déterminer le signe du trinôme en fonction de x grâçe à la forme canonique.

- Si $\Delta < 0$: $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ est du signe de a et donc ax^2+bx+c aussi.
- Si $\Delta = 0$: $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\right]$ est aussi du signe de a sauf pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ (il est alors nul).
- Si $\Delta > 0$: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ et ainsi pour déterminer son signe il suffit de faire un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		-	0	+	|	+	
$(x-x_2)$		-	|	-	0	+	
$(x-x_1)(x-x_2)$		+	0	-	0	-	
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

$\longrightarrow$ *penser à multiplier par a*

On peut ainsi résumer la situation dans le théorème suivant :

Théorème 3 : De la forme canonique du trinôme, on déduit :

Si $\Delta < 0$, ax^2+bx+c est toujours du signe de a.

Si $\Delta = 0$, ax^2+bx+c est toujours du signe de a sauf pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ (il est alors nul).

Si $\Delta > 0$, ax^2+bx+c est :

- du signe de a à l'extérieur des racines.
- du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

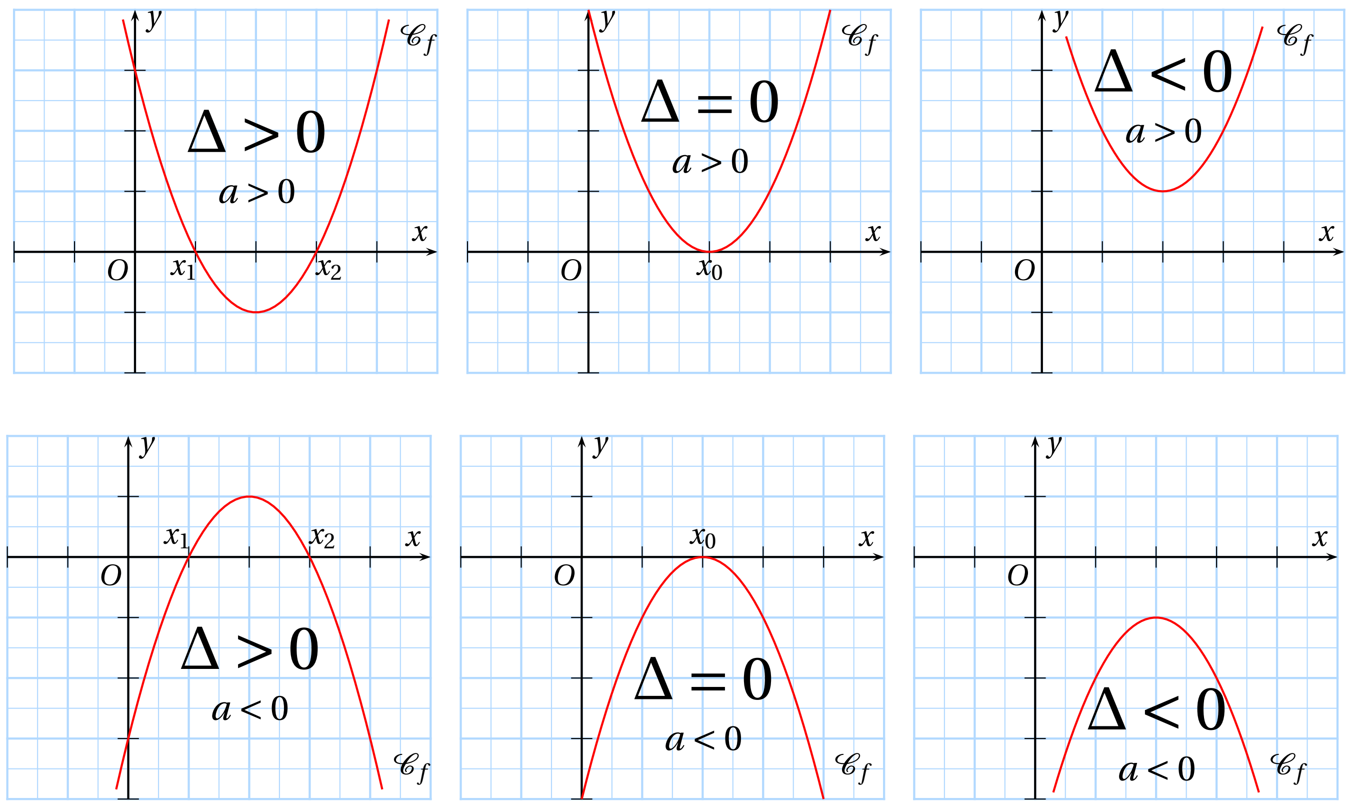
Ce qui donne sous forme de tableau

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

5) Interprétation géométrique

On considère la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2+bx+c \end{array}\right.$ et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On peut retrouver les résultats des théorèmes précédents sur $\mathscr{C}_f$:



Exercice 5 : Vérifier que cela marche sur les fonctions associées aux 4 exemples de $x^2-3x+2=0$, $2x^2+4x+2=0$,$-2x^2-3x+4=0$ et $-3x^2+2x-2=0$.

II. Polynômes

1) Définition

On commence par définir les fonctions polynômes qui sont des outils très utiles en Analyse.

Définition 3 : Une fonction polynôme est une fonction $P\ :\ \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ telle que

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k.$$

où a_0 , a_1 , ..., a_n sont des nombres réels et où $n\in\mathbb{N}$.

Vocabulaire : Les nombres réels a_0 , a_1 , ..., a_n s'appellent coefficients du polynôme P.
On lit a « indice » n.
Le nombre a_px^p s'appelle le terme de degré p du polynôme P.

Exemple :

- $f(x)=x^2-2x+1$,
- $g(x)=-2+5x-3^5$,
- $h(x)=21$..

2) Degré

Définition 4 : Si $a_n \neq 0$, n est le degré de P. On note $n = \deg P$.

Remarque : Un polynôme constant non nul $(\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 \neq 0)$ a pour degré 0.
Le polynôme nul n'a pas de degré.

Propriété 2 : Si P et Q sont deux polynômes non nuls, alors $\deg PQ = \deg P + \deg Q$.

Théorème 4 : (Admis) On a l'équivalence suivante $P = Q \Leftrightarrow \begin{cases} \deg P = \deg Q \\ \text{les coefficients de } P \text{ et } Q \text{ sont identiques} \end{cases}$

$\longrightarrow$ *démonstration faisable avec les limites*

Corollaire 1 : Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
Plus précisément, si pour tout x réel on a :
$P(x) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ \ldots,\ a_n = 0.$

3) Factorisation

Définition 5 : Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$. On appelle racine (ou zéro) de P tout nombre a tel que $P(a) = 0$.

Définition 6 : On dit qu'un polynôme P est factorisable par $(x - a)$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout x réel : $P(x) = (x - a)\, Q(x)$

Avec ces définitions on a le théorème **fondamental** suivant :

Théorème 5 : (HP) a est racine de $P \quad \Leftrightarrow \quad P$ est factorisable par $(x - a)$.

$\longrightarrow$ démonstration : Si a est racine de P, $P(a) = 0$ donc $P(x) = P(x) - P(a) = \ldots$ et $x^n - a^n = (x - a)\left(x^{n-1} + a x^{n-2} + \cdots + a^{n-2} x + a^{n-1}\right)$

Remarque : $\begin{cases} \deg P = n \\ P(x) = (x - a)\, Q(x) \end{cases} \Rightarrow \deg Q = n - 1$

Une technique pour factoriser complétement un polynôme est la technique par identification des coefficients.

Exercice 6 : Pour factoriser le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ il faut connaître au moins une racine.
Pour cela on calcule quelques valeurs, par exemple $P(0), P(1)$ et $P(-1)$.
Une fois qu'on a une racine on peut écrire $P(x) = (x + 1) Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2. On peut écrire $Q(x) = ax^2 + bx + c$ et en développant $(x + 1)(ax^2 + bx + c)$ on **doit** retrouver P d'où un système à 3 équations et 3 inconnues à résoudre.
$\longrightarrow$ $P(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$