Chap X : Transformations géométriques

Dans tout le chapitre les définitions et propriétés sont ***valides*** *aussi bien* ***dans le plan que dans l'espace****.*

I. Définitions

Définition 1 : On appelle transformation du plan (ou de l'espace) toute fonction bijective du plan (ou de l'espace),
c'est-à-dire que tout point du plan (ou de l'espace) possède un et un seul antécédent par cette fonction.

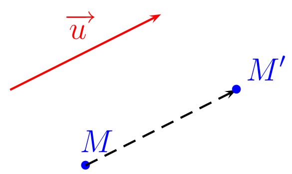
Remarque : une projection sur une droite du plan n'est pas une transformation du plan.

Définition 2 : Si f est une transformation du plan (ou de l'espace), la transformation réciproque de f est la transformation notée f^{-1} qui, à tout point du plan (ou de l'espace), associe son unique antécédent par f. $M' = f(M) \Leftrightarrow M = f^{-1}(M')$.

1) Translations

Définition 3 : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation du plan (ou de l'espace) notée $t_{\overrightarrow{u}}$ définie par :

$$M' = t_{\overrightarrow{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}.$$



Remarque : La translation de vecteur nul $t_{\overrightarrow{0}}$ est l'application identité $Id : M \mapsto M$.

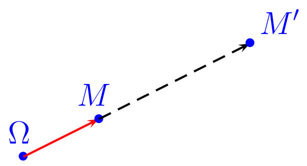
Propriété 1 : Si $M' = t_{\overrightarrow{u}}(M)$ et $N' = t_{\overrightarrow{u}}(N)$ alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.
$\longrightarrow$ *démonstration :*

Théorème 1 : La transformation réciproque de $t_{\overrightarrow{u}}$ est $t_{-\overrightarrow{u}}$.
$\longrightarrow$ *démonstration :*

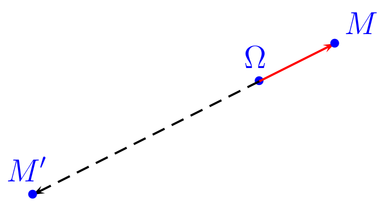
2) Homothétie

Définition 4 : Soit Ω un point du plan et soit $k \in \mathbb{R}^*$.
L'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation du plan (ou de l'espace) notée $h(\Omega\,;\,k)$ définie par : $M' = h(\Omega\,;\,k)(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.

cas $k > 0$

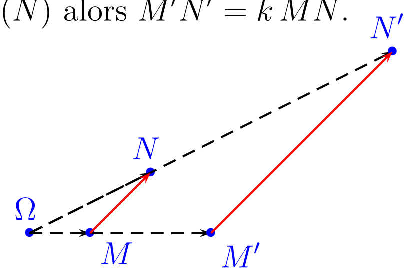


cas $k < 0$



Remarque : $h_{(\omega;1)} = Id$.

Propriété 2 : Si $M' = h(\Omega\,;\,k)(M)$ et $N' = h(\Omega\,;\,k)(N)$ alors $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.
$\longrightarrow$ *démonstration :*



Théorème 2 : La transformation réciproque de $h(\Omega\,;\,k)$ est $h\left(\Omega\,;\,\dfrac{1}{k}\right)$.

Remarque : Les symétries (centrales et axiales) ainsi que les rotations sont des tranformations du plan.

II. Propriétés des translations et des homothéties

Dans cette partie on s'intéresse aux propriétés géométriques liées aux translations et aux homothéties.
Ainsi dans toute cette partie f désigne une translation ou une homothétie.

1) Propriétés de conservation

Propriété 3 : conservation de l'alignement
Les images par f de trois points alignés sont trois points alignés.
$\longrightarrow$ *démonstration :*

Propriété 4 : conservation du barycentre
Soient G, A et B trois points avec $G = \text{bar}\,\{(A,a)\,;(B,b)\}$ et $a+b \neq 0$,
G', A' et B' leurs images respectives par f alors $G' = \text{bar}\,\{(A',a)\,;(B',b)\}$.
$\longrightarrow$ *démonstration :*

Remarque : La propriété est encore vraie pour un barycentre de n (quelconque) points pondérés.

Remarque : f conserve notamment les milieux (car un milieu est un isobarycentre).

Propriété 5 : conservation des angles orientés
Soient A, B et C trois points d'images respectives A', B' et C' par f.
Les angles orientés $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ ont alors la même mesure.
$\longrightarrow$ *démonstration* :

2) Images de figures

Propriété 6 : *Image d'un segment*
L'image par f du segment $[AB]$ est le segment parallèle $[A'B']$ où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.
$\longrightarrow$ *démonstration* :

Propriété 7 : *Image d'une droite*
L'image par f de la droite (AB) est la droite parallèle $(A'B')$ où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.
$\longrightarrow$ *démonstration* :

Propriété 8 : *Image d'un cercle*
L'image par f du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' où $A' = f(A)$ et de rayon r'.
On a $r' = r$ si f est une translation.
On a $r' = |k|\, r$ si f est une homothétie de rapport k.
$\longrightarrow$ *démonstration* :

3) Effet sur les longueurs, les aires et les volumes

Propriété 9 :
- Une translation conserve les longueurs, les aires et les volumes.
- Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, les aires par $|k|^2$ et les volumes par $|k|^3$.

$\longrightarrow$ *démonstration* : admise