Chap 8 :

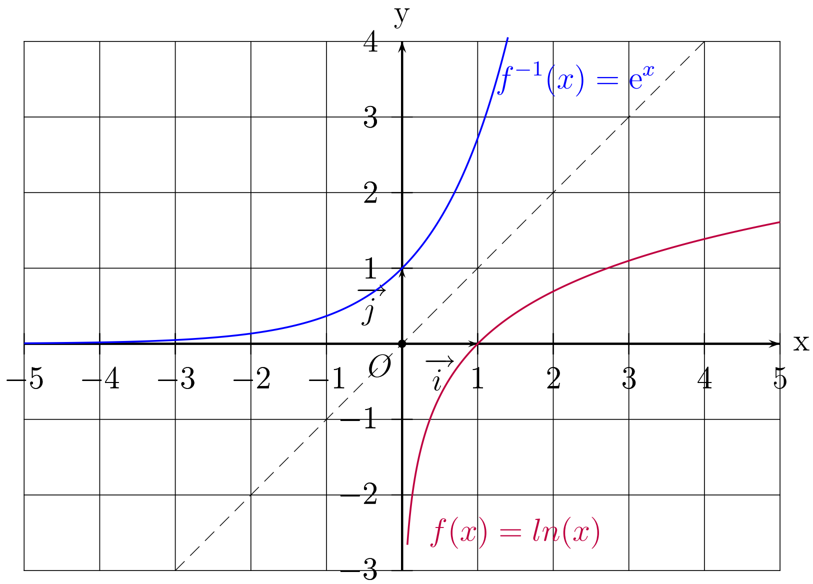
# Fonctions réciproques

## I. Définition

**Théorème 1 :** Toute fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ continue et strictement monotone sur cet intervalle réalise une bijection de cet intervalle $I$ dans l'intervalle image $J$ c'est-à-dire qu'elle admet une fonction réciproque sur $J$.
On note $f^{-1}$ la fonction réciproque de $f$.

**Remarque :** une « bijection » cela signifie que chaque nombre de $J$ a un et un seul antécédent par la fonction $f$.
Pour $x$ dans $I$ et $y$ dans $J$ il y a équivalence entre $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$.

**Exemple :** Voici un exemple : la fonction logarithme définie sur $]0; +\infty[$ et la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$.




**Propriété 1 :** Si $f$ est définie, strictement monotone et dérivable sur $I$ alors elle admet une fonction réciproque $(f^{-1})$ dérivable sur $J$.
On a de plus $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$.

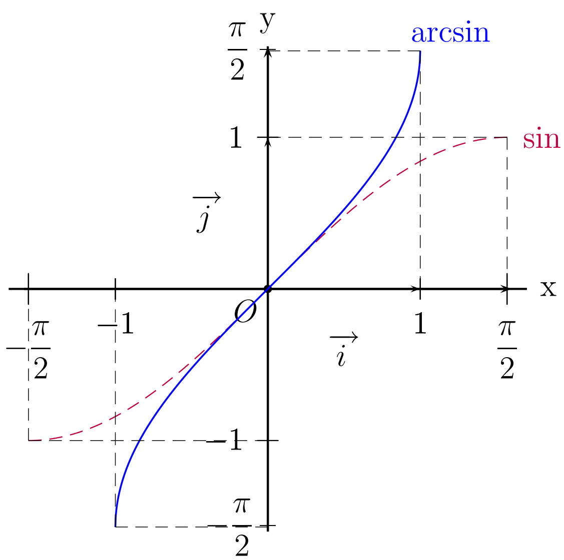
# II. Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

## 1) la fonction arcsinus

La fonction $f(x) = \sin(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Elle est strictement monotone sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ dont l'image par la fonction sinus est $[-1; 1]$.
Elle admet donc une fonction réciproque définie sur $[-1; 1]$.
C'est la fonction arcsinus. Elle est notée « arcsin ».

**Définition 1 :** La fonction arcsinus définie sur $[-1; 1]$ est la fonction inverse de la fonction sinus sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

**Remarque :** Pour tout $x$ de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $y$ de $[-1; 1]$ il y a équivalence entre $y = \sin(x)$ et $x = \arcsin(y)$.




**Propriété 2 :** La fonction arcsin est dérivable sur $]-1; 1[$ et on a pour tout $x$ de $]-1; 1[$ :

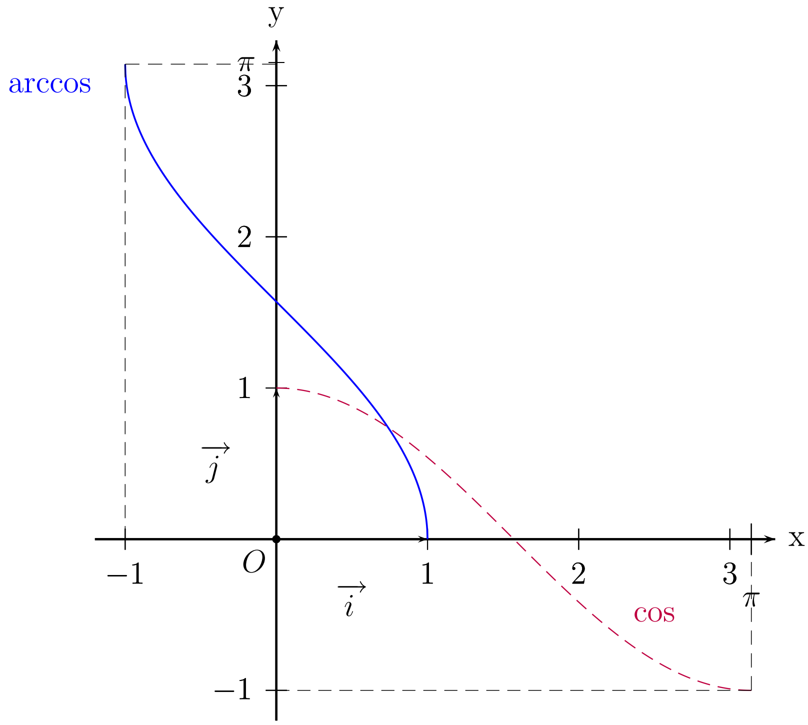
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

## 2) la fonction arccosinus

La fonction $f(x) = \cos(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Elle est strictement monotone sur $[0; \pi]$ dont l'image par la fonction cosinus est $[-1; 1]$.
Elle admet donc une fonction réciproque définie sur $[-1; 1]$.
C'est la fonction arccosinus. Elle est notée « arccos ».

**Définition 2 :** La fonction arccossinus définie sur $[-1; 1]$ est la fonction inverse de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$.

**Remarque :** Pour tout $x$ de $[0; \pi]$ et tout $y$ de $[-1; 1]$ il y a équivalence entre $y = \cos(x)$ et $x = \arccos(y)$.




**Propriété 3 :** La fonction arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et on a pour tout $x$ de $]-1;1[$ :

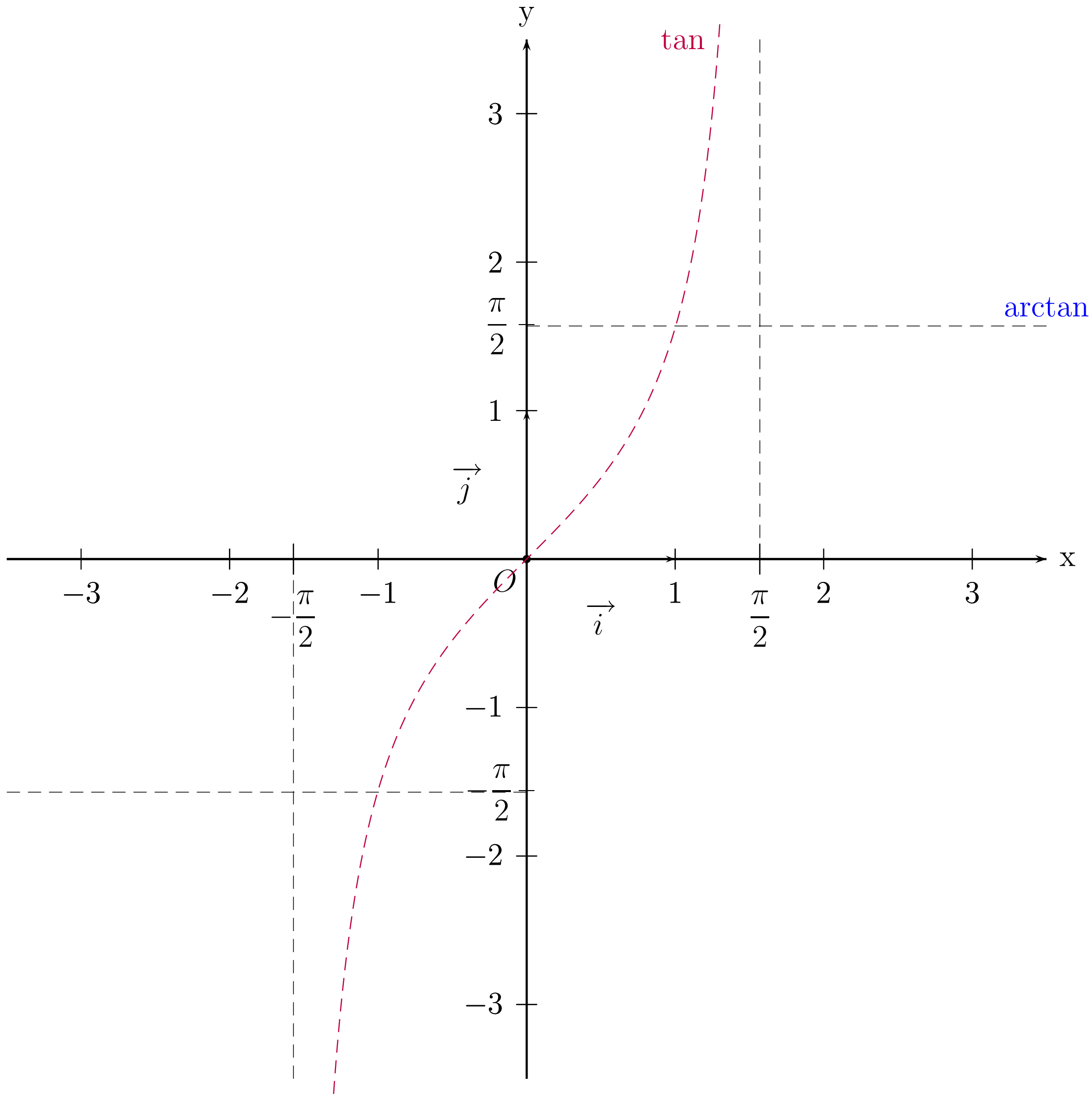
$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

## 3) la fonction arctangente

La fonction $f(x) = \tan(x)$ est définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
De plus elle est strictement monotone sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dont l'image par la fonction tangente est $\mathbb{R}$.
Elle admet donc une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.
C'est la fonction arctangente. Elle est notée « arctan ».

**Définition 3 :** La fonction arctangente définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction inverse de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

**Remarque :** Pour tout $x$ de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et tout $y$ réel il y a équivalence entre $y = \tan(x)$ et $x = \arctan(y)$.




**Propriété 4 :** La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x$ réel :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$