Chap 8 : Fonctions affines et droites

Dans tout le chapitre on munit le plan d'un repère quelconque $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

I. Fonctions affines

1) Définitions

Définition 1 : On appelle fonction affine toute fonction f du type $f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b\end{array}\right.$ où a et b sont deux nombres réels fixés.
Sa courbe représentative C_f est une droite oblique.
a s'appelle le coefficient directeur de C_f,
b s'appelle l'ordonnée à l'origine de C_f.

Exemple : $f(x) = 2x - 3$, $f(x) = -x$ ...

Remarque : Si $a = 0$ on parle de fonction constante : $f(x) = b$.
Si $b = 0$ on parle de fonction linéaire : $f(x) = ax$.

2) Coefficient directeur

Définition 2 : Soit g une fonction quelconque définie sur un intervalle I, u et v deux nombres de I.
On appelle taux de variation de g entre u et v le nombre $\dfrac{f(v)-f(u)}{v-u}$.

Exemple : Prenons la fonction $g(x) = x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer le taux de variation de g entre 0 et 2, entre 1 et 3 puis entre -1 et 0.

La notion de taux de variation permet de caractériser les fonctions affines :

Théorème 1 :
- Si f est une fonction affine alors le taux de variation entre deux nombres quelconques est toujours le même et c'est exactemeent le coefficient directeur de C_f.
C'est à dire que si $f(x) = ax + b$ alors on a $\dfrac{f(v)-f(u)}{v-u} = a$ pour tous les u et v $(u \neq v)$.
- Réciproquement si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous les u et v le taux de variation de f entre u et v est toujours le même (on l'appelle a) alors f est une fonction affine et son coefficient directeur est a.

On a également une propriété sur les variations des fonctions affines :

Propriété 1 : Si f est une fonction affine de coefficient directeur a alors :
- f est croissante sur $\mathbb{R}$ si a est positif.
- f est décroissante sur $\mathbb{R}$ si a est négatif.

3) fonctions affines et droites représentatives

Il faut savoir tracer la courbe C_f à partir de l'expression de la fonction : $f(x) = ax + b$.
- soit en utilisant l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur,
- soit en cherchant les coordonnées de deux points de la droite C_f

il faut de même savoir retrouver l'expression de f ($f(x) = ax + b$) à partir du tracé de C_f.
- soit en relevant l'ordonnée à l'origine b et en calculant un taux de variation qui donnera le coefficient directeur a,
- soit en relevant les coordonnées de deux points de la droite C_f et en en tirant un système 2×2 aux inconnues a et b qu'il faut alors résoudre.

$\longrightarrow$ à voir en TD.

II. Droites

1) Equations de droites

- Si la droite (D) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle admet une équation du type $y = ax + b$ où a et b sont des constantes.
  (D) est la courbe représentative de la fonction affine $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax + b \end{array} \right.$.
- Si la droite (D) est parallèle à l'axe des ordonées, elle admet une équation du type $x = c$ où c est une constante.

- On peut également avoir une équation cartésienne de la droite (D) avec une équation du type

$$ax + by + c = 0.$$

L'intérêt est qu'on n'a pas à distinguer si la droite (D) est parallèle à l'axe des ordonnées ou non.
$\longrightarrow$ faire le lien entre les deux types d'équations.

2) Vecteurs directeurs

Définition 3 : On appelle vecteur directeur de (D) tout vecteur <u>non nul</u> dont la direction est (D).

Remarque : Si A et B sont deux points de (D) alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (D).

Propriété 2 :
- Si (D) admet pour équation $y = ax + b$ dans le repère $\left(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ alors le vecteur $\overrightarrow{u}(1; a)$ est un vecteur directeur de (D).

- Si (D) admet pour équation $x = c$ dans le repère $\left(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ alors le vecteur $\overrightarrow{u}(0; 1)$ est un vecteur directeur de (D).

ou bien
- Si (D) admet pour équation $ax + by + c = 0$ dans le repère $\left(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ alors le vecteur $\overrightarrow{u}(b; -a)$ est un vecteur directeur de (D).

Remarque : Les vecteurs de coordonnées $(2; 2a)$, $(0; -1)$ et $(2b; -2a)$ par exemple seraient aussi des vecteurs directeurs pour les trois cas précédents.

3) Parallélisme

Définition 4 : Deux droites sont parallèles lorsque deux de leurs vecteurs directeurs sonyt colinéaires.

Propriété 3 :
- Deux droites d'équations $x = c$ et $x = c'$ sont toujours parallèles (et parallèles à l'axe des ordonnées).
- Deux droites d'équation $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles si et seulement si $a = a'$.

III. Systèmes

On cherche à déterminer les coordonnées des points d'intersections de deux droites (D) et (D') dont on connait une équation.

1) (D) d'équation $x = c$ et (D') d'équation $x = c'$

Les droites (D) et (D') sont parallèles il y a donc deux possibilités :

- Soit elles sont confondues c'est-à-dire $c = c'$ et alors il y a une infinité de points d'intersection : tous les points de (D).
  Le système $\left\{\begin{array}{l} x = c \\ x = c' \end{array}\right.$ admet une infinité de couples $(x; y)$ solutions : tous les $(x; ax + b)$ pour x réel.
- Soit elles sont disjointes c'est-à-dire $c \neq c'$ et alors il n'y a pas de point d'intersection.
  Le système $\left\{\begin{array}{l} x = c \\ x = c' \end{array}\right.$ n'admet pas de solutions.

2) (D) d'équation $y = ax + b$ et (D') d'équation $x = c$

Les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles, elles ont donc un et un seul point d'intersection dont les coordonnées sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l} y = ax + b \\ x = c \end{array}\right.$ qu'il nous faut résoudre.

3) (D) d'équation $y = ax + b$ et (D') d'équation $y = a'x + b$

Deux cas se présentent :

- Si les droites (D) et (D') sont parallèles c'est-à-dire si $a = a$' alors

- soit (D) et (D') sont confondues c'est-à-dire $b = b'$ et alors il y a une infinité de points d'intersection : tous les points de (D).
  Le système $\begin{cases} y = ax + b \\ y = ax + b \end{cases}$ admet donc une infinité de couples $(x; y)$ solutions.
- soit (D) et (D') sont disjoointes c'est-à-dire $b \neq b'$ et alors il n'y a pas de point d'intersection.
  Le système $\begin{cases} y = ax + b \\ y = ax + b' \end{cases}$ n'admet pas de solutions.

• Si les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles c'est-à-dire si $a \neq a$' alors elles ont un et un seul point d'intersection dont les coordonnées sont solutions du système $\begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$ qu'il nous faut résoudre.

Remarque : Dans tous les cas, lorsqu'on doit résoudre un système, il faut d'abord déterminer le nombre de solutions du système avant de se lancer dans les calculs.

On peut avoir des systèmes dans lesquels les droites sont données avec une équation cartésienne du type $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$. dont des vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{u}(b; -a)$ et $\overrightarrow{v}(b'; -a')$. pour savoir si les droites sont ou non parallèles on teste la colinéarité de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ c'est-à-dire si $ab' - a'b$ est nul ou pas.

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$.