Chap 7 :

Probabilités

I. Vocabulaire et propriétés

1) Rappels

Définition 1 : Dans une expérience aléatoire, on appelle univers l'ensemble de toutes les issues possibles. On note souvent cet ensemble Ω.

On appelle événement toute *partie* de l'univers.
Si cette partie n'a qu'un élément on parle d'événement élémentaire.

On appelle événement contraire de A la partie de Ω composée de toutes les issues qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$.

2) Propriétés du calcul des probabilités

La probabilité d'un événement A représente les « chances » qu'a l'événement A de se réaliser effectivement. On le note $P(A)$.

Remarque : On a **toujours** $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
On a **toujours** $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.
Il n'y a pas toujours *équiprobabilité*.

Remarque : Il faut distinguer *probabilités* de *fréquences d'apparition*.

Définition 2 : La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires de A.

Définition 3 : On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.

On a la propriété « naturelle » suivante :

Proposition 1 : Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

On peut en déduire la propriété très utile suivante :

Proposition 2 : On a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Enfin dans le cas général (c'est-à-dire pas forcément disjointe) d'une union de deux événements on a :

Proposition 3 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Et pour l'intersection $A \cap B$ de deux événements ?

il n'y a pas de formule pour ca,
sauf dans un cas particulier : *l'indépendance* des événements.

II. Indépendance

1) Probabilité conditionelle

Définition 4 : On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Il représente la probabilité de B en supposant que A soit *effectivement* réalisé.

Remarque : On le voit aussi parfois écrit $P(B|A)$.

Proposition 4 : On peut réécrire la définition : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

Remarque : Cette définition correspond bien à l'idée intuitive que l'on a de « B sachant A ». Prenons un exemple pour illustrer notre propos.

Exemple : On considère le résultat du tirage de deux boules successives dans une urne opaque qui en contient 3 rouges et 2 vertes.
On a alors $P(R_1) = \frac{3}{5}$, $P(R_1 \cap R_2) = \frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{3}{10}$ et on a bien $P_{R_1}(R_2) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$.

2) indépendance

Définition 5 : On dit que deux événements A et B sont indépendants si $P_A(B) = P(B)$.

Remarque : on peut réécrire cette définition : $P\big(A \cap B\big) = P(A) \times P(B)$.

Il y a deux façons d'avoir des événements indépendants :
• soit le "bon sens" vous suggère que les événements le sont,
• soit l'énoncé vous le dit d'une manière ou d'une autre.

Les cas d'indépendance sont dans la pratique très courants.
Dès qu'on répète plusieurs fois une même expérience aléatoire, par exemple, les résultats de ces expériences sont indépendants les uns des autres.

Exemple : Reprenons notre exemple du tirage mais en supposant qu'une fois la première boule tirée on la remette dans l'urne avant de tirer la seconde.
On a alors $P\big(R_1 \cap R_2\big) = \dfrac{3 \times 3}{5 \times 5} = \dfrac{9}{25}$, $P(R_1) = \dfrac{3}{5}$ et on a bien $P_{R_1}\big(R_2\big) = \dfrac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{3}{5}$.