Chap 7 :

Géométrie analytique

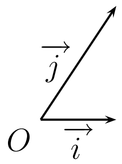
I. Repérage dans le plan

1) repère

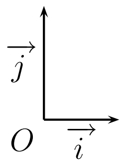
Définition 1 : Un repère du plan est déterminé :
- soit par la donnée de 3 points O, I et J non alignés,
  (OI) est l'axe des abscisses et (OJ) l'axe des ordonnées.
- soit par la donnée d'un point O et de 2 vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ non colinéaires.
  Ce sont les vecteurs de base.

Il y a trois types de repère :

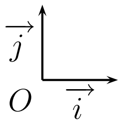
repère quelconque



repère orthogonal

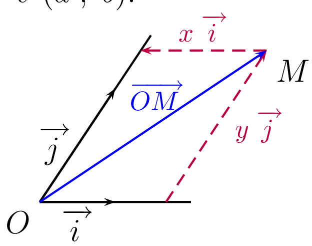


repère orthonormal



2) coordonnées

Définition-Théorème : Soit $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ un repère quelconque du plan.
Dire que M a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ c'est dire que $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$.
x et y sont alors uniques.
De même on dit que le vecteur $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(a\,;\,b)$ si
$\overrightarrow{v}=a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}$.
Là encore a et b sont alors uniques.
On note $\overrightarrow{v}(a\,;\,b)$.



II. Utilisation des coordonnées

L'introduction des coordonnées dans la géométrie fut une véritable révolution et ouvrit beaucoup de possibilités.
En effet on peut faire énormément de raisonnements géométriques (pour ne pas dire tous) à partir du calcul des coordonnées.
En revanche l'utilisation des coordonnées n'est pas toujours le méthode la plus simple …

1) Calculs sur les coordonnées

Propriété 1 : Soit $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ un repère quelconque du plan et k un nombre réel.
Pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$ on a :

- $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=x' \\ y=y' \end{array}\right.$,
- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x+x'\,;\,y+y')$,
- $k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(kx\,;\,ky)$.

Propriété 2 : Soit $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ un repère quelconque du plan, A et B deux points du plan de coordonnées $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A)$.
$\longrightarrow$ *démonstration :*

Propriété 3 : Soit $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ un repère quelconque du plan, A et B deux points du plan de coordonnées $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$.
Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.
(L'abscisse du milieu est la moyenne des abscisses, l'ordonnée du milieu est la moyenne des ordonnées.)

2) Longueur

Propriété 4 : Soit un repère **orthonormal** $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, et deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$.
On a : $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

$\longrightarrow$ *démonstration :*

Exemple : $A(1;2)$ et $B(-1;-1)$ donnent $AB=\sqrt{13}$

3) Colinéarité

Propriété 5 : Soit $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ un repère quelconque. Soient $\overrightarrow{u}(x\,;\,y)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;\,y')$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Autrement dit : $\boxed{\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires} \Longleftrightarrow x\,y'-x'\,y=0}$.

Remarque : On peut alors « tester » la colinéarité ou non de deux vecteurs :
si $x\,y'-x'\,y=0$, ils sont colinéaires
et si $x\,y'-x'\,y\neq 0$, ils ne le sont pas.

Exemple : Par exemple $\overrightarrow{u}(2\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{v}(-4\,;\,2)$ sont colinéaires mais $\overrightarrow{u}(2\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{w}(3\,;\,3)$ ne le sont pas.