Chap 6 :

Puissances

I. Définitions-Propriétés

1) Définition

On considère deux nombres réels a et b tels que a soit strictement positif.

Définition 1 : On note a^b le nombre réel positif tel que $\ln\left(a^b\right) = b\ln(a)$
c'est-à-dire que a^b est l'unique antécédent par la fonction ln de $b\ln(a)$.
a^b se lit « a exposant b ».

Remarque : Lorsque b est un entier on retrouve la définition classique de a^b grâce à la formule $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.
On retrouve aussi par exemple $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ou $a^0 = 1$.

2) Règles opératoires

Les règles de calcul sur les puissances avec exposant entier vues en 2° s'étendent aux cas où b est un nombre quelconque :

Proposition 1 : On considère 4 nombres a, a', b et b' avec a et a' strictement positifs. On a alors :

- $1^b = 1$;
- $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$;
- $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$;
- $\dfrac{1}{a^b} = a^{-b}$;
- $a^b a'^b = (aa')^b$;
- $\dfrac{a^b}{a'^b} = \left(\dfrac{a}{a'}\right)^b$;
- $\left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'}$.

II. Equations-Inéquations

1) Equation $x^n = a$

Dans cette partie $a > 0$ et l'équation est définie pour $x > 0$.
Nous avons déjà rencontré des équations de ce type dans le cours sur les taux d'évolution.
La résolution de cette équation passe par le ln.

Proposition 2 : L'équation $x^n = a$ où $a > 0$ et n est un entier a une seule solution $x = a^{\frac{1}{n}}$.

Exemple : Il faut voir la résolution sur un exemple pour comprendre d'où vient la solution :
$x^6 = 3 \iff \ln\left(x^6\right) = \ln(3) \iff 6\ln(x) = \ln(3)$
$\iff \ln(x) = \dfrac{1}{6}\ln(3) = \ln\left(3^{\frac{1}{6}}\right) \iff x = 3^{\frac{1}{6}}$.

2) Equation et inéquation : $\ln(x) = k$, $\ln(x) < k$, $\ln(x) > k$

Dans cette partie $a > 0$ et les équations et inéquations sont définies pour x dans $]0\,;+\infty[$.
Nous avons déjà rencontré des équations et inéquations de ce type dans le chapitre précédent avec la fonction exp .

Proposition 3 : L'équation $\ln(x) = k$ a une seule solution $x = \mathrm{e}^k$.

Remarque : Pour la résolution on passe l'équation à l'exponentielle.

Proposition 4 : L'inéquation $\ln(x) < k$ admet comme solution les $x < \mathrm{e}^k$.
L'ensemble solution de cette inéquation est $\left]0\,;\mathrm{e}^k\right[$.
Il ne faut pas oublier que l'inéquation est définie pour x dans $]0\,;+\infty[$.

Remarque : On a des résultats similaires pour les inéquations $\ln(x) > k$, $\ln(x) \leqslant k$ ...

3) Equation et inéquation : $a^x = k$, $a^x < k$, $a^x > k$

Dans cette partie $a > 0$, $a \neq 1$ et $k > 0$ et les équations et inéquations sont définies pour x réel. Nous avons déjà rencontré ce type d'équations et d'inéquations dans le chapitre précédent avec les fonctions exponentielles ainssi que dans le chapitre sur les taux d'évolution.

Proposition 5 : L'équation $a^x = k$ a une seule solution $x = \dfrac{\ln(k)}{\ln(a)}$.

Exemple : Il faut voir la résolution sur un exemple pour comprendre d'où vient la solution :

$$3^x = 5 \iff \ln\left(3^x\right) = \ln(5) \iff x\ln(3) = \ln(5) \iff x = \frac{\ln(5)}{\ln(3)}.$$

Remarque : Si on prend $a = 1$ l'équation ne peut pas avoir de solution car $1^x = 1$.
De même si $k \leqslant 0$ il n'y a pas de solution car pour tout x : $a^x > 0$.

Pour les inéquations la résolution suit le même principe mais il faut distinguer les cas suivant le signe de $\ln(a)$ c'est-à-dire suivant si $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

Exemple : Par exemple on résout $0,8^x < 0,03$: $x\ln(0,8) < \ln(0,03) \iff x > \dfrac{\ln(0,03)}{\ln(0,8)}$.

Proposition 6 :

- Si $a > 1$ alors $\ln(a) > 0$ et
  l'inéquation $a^x < k$ a comme ensemble solution $\left]-\infty\,;\dfrac{\ln(k)}{\ln(a)}\right[$.
- Si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$ et
  l'inéquation $a^x < k$ a comme ensemble solution $\left]\dfrac{\ln(k)}{\ln(a)}\,;+\infty\right[$.

On peut de même résoudre l'inéquation $a^x > k$:

Proposition 7 :

- Si $a > 1$ alors $\ln(a) > 0$ et
  l'inéquation $a^x > k$ a comme ensemble solution $\left]\dfrac{\ln(k)}{\ln(a)}\,;+\infty\right[$.
- Si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$ et
  l'inéquation $a^x > k$ a comme ensemble solution $\left]-\infty\,;\dfrac{\ln(k)}{\ln(a)}\right[$.

Remarque : On a des résultats similaires pour les inéquations $a^x \leqslant k$ et $a^x \geqslant k$.