Chap 6 :

Inéquations et signes

I. Inéquations du premier degré

Définition 1 : On dit que deux équations ou deux inéquations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions.

Il y a quatre règles pour passer d'une inéquation à une inéquation équivalente :

Règle 1 : Ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres de l'inéquation.

Règle 2 : Multiplier ou diviser par un même nombre positif les deux membres de l'inéquation.

Règle 3 : Multiplier ou diviser par un même nombre négatif les deux membres de l'inéquation en changeant le sens de l'inégalité.

Règle 4 : Simplifier les écritures (mettre au même dénominateur ...).

Remarque : On donne toujours les ensembles solution sous formes d'intervalles.

Rem : Parler de valeurs absolues.

II. Signe de $ax + b$

1) Résolution

Chercher le signe de $ax + b$ revient à résoudre $ax + b > 0$.

Exemple : Chercher le signe de $2x + 5$ revient à résoudre $2x + 5 > 0$: $2x > -5$ et donc $x > -\dfrac{5}{2}$.

$2x + 5$ est ainsi positif dès que $x > -\dfrac{5}{2}$.

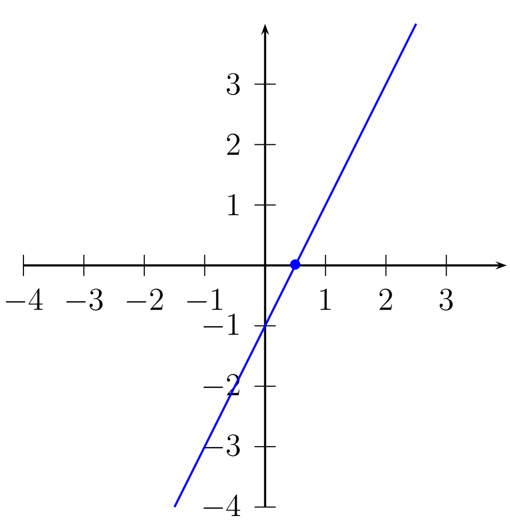
On peut alors mettre les résultats dans un tableau de signes.
Dans notre exemple précédent cela donnerait :

x	$-\infty$		$-\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
$2x+5$		-	0	$+$	

2) Représentation graphique

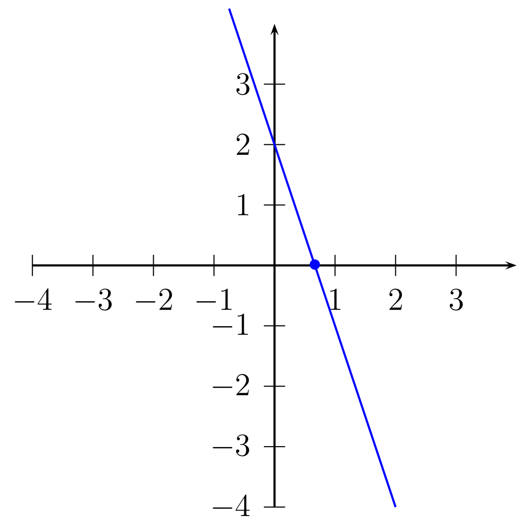
Si on trace la droite d'équation $y = ax + b$ on peut alors lire sur le graphique le signe de $ax + b$.

Pour $y = 2x - 1$:



x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	-	0	$+$

Pour $y = -3x + 2$:



x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-2x + 3$	$+$	0	-

III. Inéquations produit et quotient

1) Inéquations de degré 2, inéquations produit

Une inéquation de degré deux est une inéquation qui, si elle est développée, contient des « x^2 ».

Exemple : $2x^2 + 1 \leqslant 3$.

Le principe de résolution est d'obtenir une inéquation équivalente avec un des deux membres nul,

Exemple : Avec notre exemple : $2x^2 + 1 - 3 \leqslant 0$ c'est-à-dire $2x^2 - 2 \leqslant 0$.

puis de factoriser au maximum l'expression,

Exemple : Avec notre exemple cela donne : $2x^2 - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)(x + 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \leqslant 0$.
Cette dernière inéquation s'appelle une inéquation produit.

de chercher le signe de chacun des facteurs,

Exemple : $\begin{array}{l|l} x-1>0 & x+1>0 \\ x>1 & x>-1 \end{array}$. On a ainsi déterminé le signe de chacun des facteurs en fonction de x.

on met enfin les résultats dans un tableau de signes et on y *lit* l'ensemble solution.

Exemple :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x+1)$		-	0	+	|	+	
$(x-1)$		-	|	-	0	+	
$2(x+1)(x-1)$		+	0	-	0	+	

L'ensemble des solutions est donc $[-1;1]$.

2) Inéquations quotient

Une inéquation quotient est une inéquation avec des « x » au dénominateur.

Le principe de résolution reste globalement le même que pour une inéquation produit :

Exemple : $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$. Il **FAUT** que x soit non nul.

On cherche une inéquation équivalente avec un des deux membres nul,

Exemple : Avec notre exemple cela donne $\dfrac{1}{x} \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} \leqslant 0$.

on détermine le signe du numérateur et du dénominateur,

Exemple : $\begin{array}{l|l} 1-x>0 & x>0 \\ 1>x & \end{array}$. On a ainsi déterminé le signe de chacun des facteur en fonction de x.

on met enfin les résultats dans un tableau de signes et on y *lit* l'ensemble solution.
Les doubles barres représentent les valeurs interdites pour l'inéquation :

Exemple :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		-	0	+	|	+	
$1-x$		+	|	+	0	-	
$\dfrac{1-x}{x}$		-	||	+	0	-	

L'ensemble solution est ainsi$]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$.