Chap 5 :

# Limites et asymptotes

## I. Limites en l'infini

### 1) Limite infinie à l'infini

**Définition 1 :** Soit $f$ une fonction définie *au moins* sur un intervalle du type $[\alpha\,;+\infty[$ :
(c'est-à-dire que $f(x)$ existe pour $x$ suffisamment grand)
On dit que $f$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que $x$ est assez grand.
( Lorsqu'on dit grand, on sous-entend positif ).

**Exemple :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

On définit de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ par $f(x)$ est aussi grand dans les négatifs que l'on veut dès que $x$ est assez grand.

On définit encore de manière analogue $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
(attention toutefois à l'ensemble de définition).

**Exemple :** $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

### 2) Limite finie à l'infini

**Définition 2 :** Soit $f$ une fonction définie *au moins* sur un intervalle du type $[\alpha\,;+\infty[$ :
(c'est-à-dire que $f(x)$ existe pour $x$ suffisamment grand)
On dit que $f$ a pour limite 0 en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut dès que $x$ est assez grand.
( Lorsqu'on dit petit, on sous-entend proche de zéro.)

On définit de même : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

**Exemple :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}=0;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3}=0;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

**Exemple :** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}=0;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}=0;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3}=0$

On peut à présent définir une limite (finie) quelconque en l'infini :

**Définition 3 :** Soit $f$ une fonction définie *au moins* sur un intervalle du type $[\alpha\,;\,+\infty[$ :
Avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ signifie avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - l] = 0$.
Ou encore avoir $f(x)$ aussi proche de $l$ que l'on veut pour $x$ suffisamment grand.

On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

**Remarque :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; f(x) = l + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$.
$\longrightarrow$ *démonstration*

**Remarque :** Une fonction n'a pas nécessairement de limite (finie ou infinie) lorsque $x$ tend vers $+\infty$ :
par exemple $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$ n'a de limite ni en $-\infty$ ni en $+\infty$.

# II. Limite en un point $a$

## 1) Limite en 0

**Définition 4 :** Soit $f$ une fonction définie au moins sur un intervalle « touchant » 0 :
(pour que $f(x)$ existe pour $x$ aussi proche qu'on veut de 0)
Si $f(x)$ est aussi grand (positif) que l'on veut dès que $x$ est assez proche de 0, on dit que $f$ a pour limite $+\infty$ en 0 et on note $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$.

On définit de même $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$.

**Exemple :** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

**Remarque :** Une fonction peut avoir une limite différente à gauche et à droite de 0, on notera alors :
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$
On note également parfois : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$.

**Définition 5 :** Soit $f$ une fonction définie au moins sur un intervalle « touchant » 0 :
Si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut (proche de 0) dès que $x$ est assez proche de 0, on dit que $f$ a pour limite 0 en 0 et on note $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

**Exemple :** $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$

**Définition 6 :** Soit $f$ une fonction définie au moins sur un intervalle « touchant » 0 :
On dit que $f$ a pour limite $l$ en 0 lorsque la fonction $x \mapsto f(x) - l$ a pour limite 0 en 0.
Ou encore lorsque $f(x)$ est aussi proche de $l$ que l'on veut dès que $x$ est suffisamment proche de 0.

**Remarque :** On peut traduire mathématiquement cette définition par

$$\lim_{x \to 0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \big(f(x) - l\big) = 0.$$

## 2) Limites en $a \in \mathbb{R}$

**Définition 7 :** Soit $f$ une fonction définie au moins sur un intervalle « touchant » $a$, on dit que $f$ a une limite en $a$ si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ a une limite en 0 et alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h).$$

**Exemple :** On a $\lim\limits_{x \to 1} \left(1 + \dfrac{1}{(x-1)^2}\right) = \lim\limits_{h \to 0} \left(1 + \dfrac{1}{h^2}\right) = +\infty$.

**Remarque :** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = l + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.
$\longrightarrow$ *démonstration*

**Remarque :** Si $a \in \mathcal{D}_f$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Dans la pratique on utilise très souvent cette propriété.

**Exemple :** Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
Si $P$ est un polynôme, $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.
Si $R$ est une fraction rationnelle *définie en a*, $\lim\limits_{x \to a} R(x) = R(a)$.

**Remarque :** Avec les limites on peut compléter les tableaux de variations des fonctions.

# III. Opérations sur les limites

Dans toute cettte partie les limites des fonctions $f$ et $g$ sont prises aux mêmes « points » à savoir $+\infty$, $-\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$.

## 1) Somme

On a le tableau récapitulatif suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim f(x) =$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim g(x) =$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim \big(f(x) + g(x)\big) =$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $F.I$ |

## 2) Produit

On a le tableau récapitulatif suivant :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim f(x) =$ | $l$ | $l > 0$ | $l < 0$ | $l > 0$ | $l < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0$ |
| $\lim g(x) =$ | $l'$ | $+\infty$ | | $-\infty$ | | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim \big(f(x) \times g(x)\big) =$ | $ll'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $F.I$ |

## 3) Quotient

On a le tableau récapitulatif suivant :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim f(x) =$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | | $-\infty$ | | $\pm\infty$ | $l < 0$ ou $-\infty$ | | $l > 0$ ou $+\infty$ | | $0$ |
| $\lim g(x) =$ | $l' \neq 0$ | $\pm\infty$ | $l' > 0$ | $l' < 0$ | $l' > 0$ | $l' < 0$ | $\pm\infty$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0$ |
| $\lim \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) =$ | $\dfrac{l}{l'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $F.I$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $F.I$ |

**Remarque :**
- Dans le tableau précédent $0^+$ (resp. $0^-$) indique que la limite est nulle et que la fonction reste positive (resp. négative).
- Il y a au total quatre formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$

**Remarque :** Avec ces règles de calcul et quelques transformations on peut trouver *n'importe quelle* limite.

**Exemple :** On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 3x^2 + 4x + 1\right)$.
Si on voit ce polynôme comme une somme de monômes on obtient une F.I. du type $+\infty - \infty$ mais on peut toujours écrire $x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = x^3 \left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 1 - 0 + 0 + 0 = 1$ par somme des limites. On a donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 3x^2 + 4x + 1\right) = +\infty$ vu comme « $1 \times +\infty$ ».

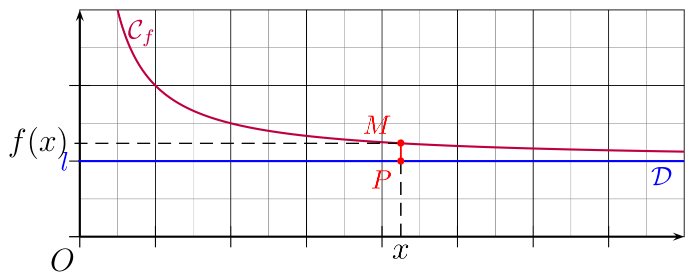
$\longrightarrow$ on traitera en TD tous les cas pour les polynômes et les fractions rationnelles.

# IV. Interprétation graphique et asymptotes

## 1) Asymptote horizontale

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$,
pour $M\big(x\,;\, f(x)\big)$ et $P(x\,;\, l)$ les points d'abscisses $x$, lorsque $x$ prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance $PM$ tend vers 0 :
On dit alors que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Interprétation graphique pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

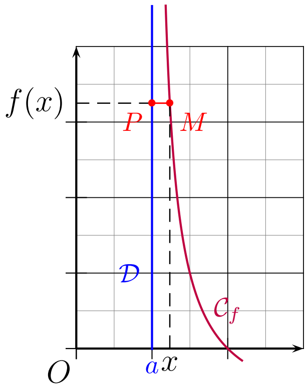



**Remarque :** On peut définir de même l'asymptote d'équation $y = l$ en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

## 2) Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$,
on dit que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.
$M\big(x\,;\,f(x)\big)$ et $P\big(a\,;\,f(x)\big)$ sont ici les deux points de même ordonnée et la distance $PM$ tend vers zéro lorsque cette ordonnée de $P$ et $M$ tend vers $+\infty$.

Interprétation graphique pour $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

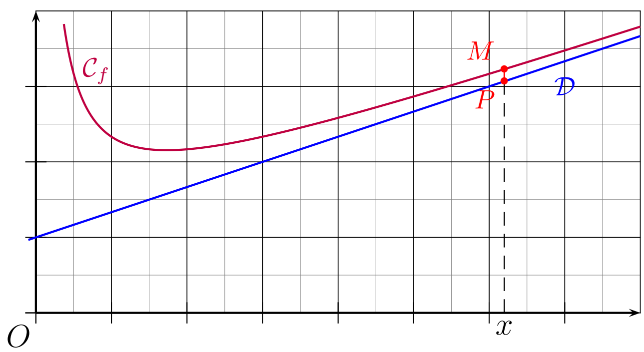



## 3) Asymptote oblique

**Définition 8 :** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle du type $[\alpha; +\infty[$, s'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ on dira que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

**Remarque :**
- La méthode de détermination est H.P.
- On a nécessairement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Interprétation graphique, avec $M\big(x\,;\,f(x)\big)$ et $P(x\,;\,ax + b)$ les deux points d'abscisses $x$, pour $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$




On peut de même définir une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.