Chap 5 :

Les Exponentielles

I. La fonction exp

Dans cette partie on s'intéresse à une fonction un peu particulière : la fonction exponentielle.

1) Définition

Remarque : On rappelle que la fonction ln n'est définie que sur $]0\,;+\infty[$ mais n'importe quel nombre réel est le logarithme d'un nombre positif.

Définition 1 : On appelle fonction exponentielle la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)$ est l'unique antécédent y de x par la fonction ln c'est-à-dire $\ln\left(y\right) = x$.
On la note exp et on note également $f(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Remarque : La notation e^x est en lien avec les puissance ainsi que le nombre « e » défini dans le cours sur la fonction logarithme.
e^x se lit « e puissance x ».

Proposition 1 : Pour tout nombre strictement positif y et tout réel x on a :

- $y = \mathrm{e}^x$ équivaut à $\ln(y) = x$;
- $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$;
- $\mathrm{e}^{\ln(y)} = y$;
- $\mathrm{e}^x > 0$.

2) étude de la fonction

On va à présent étudier la fonction exp.

Proposition 2 : La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$ ou encore $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

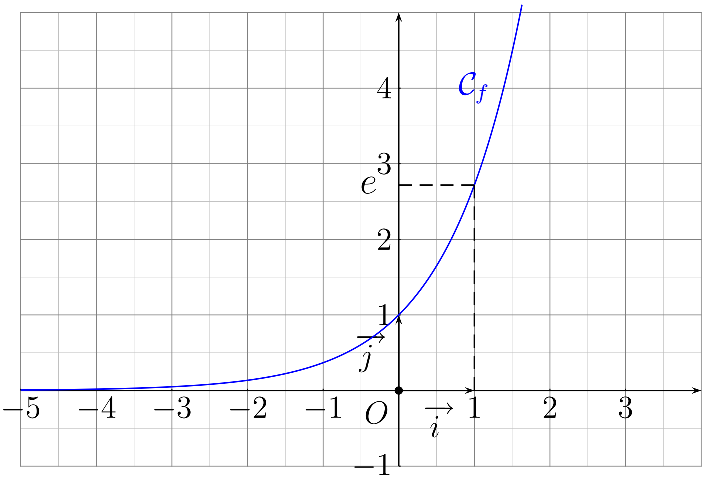
Puisque $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ et que pour tout x réel e^x est strictement positif :

Proposition 3 : La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

On peut alors tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.



II. Propriétés algébriques

1) Comparaison

Proposition 4 : On a
$e^a = e^b$ est équivalent à $a = b$;
$e^a < e^b$ est équivalent à $a < b$.

2) Règles opératoires

On a un théorème fondamental pour les règles opératoires avec l'exponentielle :

Théorème 1 : Pour tous a et b réels on a : $\quad e^{a+b} = e^a \times e^b$.

De ce résultat découle plusieures formules :

Proposition 5 : Pour tous a et b réels on a :

$$\frac{1}{e^a} = e^{-a}\,;$$
$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}\,;$$
$$e^{n\times a} = (e^a)^n \quad \text{pour tout entier } n\,;$$
$$e^{\frac{1}{2}\times a} = \sqrt{e^a}\;.$$

Remarque : Il faut bien faire attention à ne pas confondre ces formules avec les formules correspondantes pour le logarithme.
En fait ici ce sont les formules « inverses ».

III. Fonctions exponentielles de base a

Dans cette partie on considère un nombre a strictement positif.

Définition 2 : On appelle fonction exponentielle de base a la fonction définie pour tout réel x par $x \longrightarrow a^x$ où $a^x = e^{x\times\ln(a)}$.

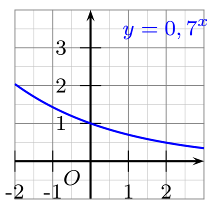
Remarque : Ces fonctions sont des cas plus généraux de e^x.
Notamment la fonction exponentielle de base le nombre e est la fonction exponentielle du premier paragraphe.
On a aussi $1^x = e^{x\times ln(1)} = e^{x\times 0} = e^0 = 1$ pour tout x réel.

Proposition 6 : La fonction $f : x \longrightarrow a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $f'(x) = \ln(a)\times a^x$.

Ainsi on peut connaitre le signe de f' en fonction de a :

Proposition 7 : La fonction $x \longrightarrow a^x$ est

- strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$;



- strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$.