Chap 3 :

Opérations sur les fonctions

I. Vocabulaire

1) Courbe d'une fonction

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$. On appelle courbe représentative de f, dans un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$ du plan, l'ensemble des points M de coordonnées $\big(x\ ;\ f(x)\big)$, pour x dans $\mathcal{D}$.

2) Restriction d'une fonction

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ inclu dans $\mathcal{D}_f$. La restriction de f à I est la fonction g définie sur I par $f(x) = g(x)$.

II. Comparaison de deux fonctions

1) Egalité de deux fonctions

Définition 3 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

$$f = g \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \\ \forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = g(x). \end{array} \right.$$

2) Notation : $f \leqslant g$

Définition 4 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.
Soit I un intervalle inclu dans $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.

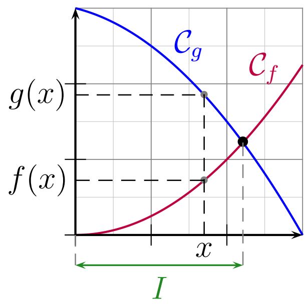
$$f \leqslant g \text{ sur } I \Longleftrightarrow \forall x \in I, f(x) \leqslant g(x).$$

Remarque : On définit de manière analogue $f < g$ sur I, $f > g$ sur I et $f \geqslant g$ sur I.

Représentation graphique :
Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes respectives de deux fonctions f et g.

$$f \leqslant g \text{ sur } I \Leftrightarrow \mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } \mathcal{C}_g \text{ sur } I.$$

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersections des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Définition 5 : On dit que f est positive sur $\mathcal{D}_f$ et on note $f \geqslant 0$ si pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $f(x) \geqslant 0$.

Interprétation graphique :
La courbe représentative de la restriction de f à I est située au dessus de l'axe des abscisses.

Remarque : On définit de manière analogue $f < 0$ sur I, $f > 0$ sur I et $f \geqslant 0$ sur I.

Définition 6 : On dit qu'une fonction f est bornée sur un intervalle I (inclu dans $\mathcal{D}_f$) s'il existe deux nombres m et M tels que $\forall x \in I$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Remarque :
- Si $\forall x \in I, f(x) \leqslant M$, on dit que f est majorée sur I.
- Si $\forall x \in I, m \leqslant f(x)$, on dit que f est minorée sur I .
- Si f est à la fois majorée et minorée sur I, elle est bornée sur I.

III. Opérations sur les fonctions

1) Somme

Définition 7 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.
La fonction $f+g$ est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par
$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

2) Multiplication par un réel

Définition 8 : Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
La fonction αf est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ par
$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (\alpha f)(x) = \alpha \times f(x)$.

3) Produit

Définition 9 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.
La fonction $f \times g$ est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ par
$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g, \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.

4) Quotient

Définition 10 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.
La fonction $\dfrac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g^*$ par

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

avec $\mathcal{D}_g^*$ l'ensemble des x de $\mathcal{D}_g$ pour lesquels $g(x) \neq 0$.

Remarque : On définit la fonction inverse $\dfrac{1}{f}$ de manière analogue.

5) Composition

Définition 11 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ et telles que pour tout x de $\mathcal{D}_f$: $g(x) \in \mathcal{D}_f$.
La fonction $f \circ g$ est la fonction définie sur $\mathcal{D}_g$ par $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.
Elle se lit f « rond » g.

Exemple : Prenons f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 1$. On a bien $g(x) \in \mathcal{D}_f$ pour tout x car $g(x) \geqslant 1$.
On peut donc définir $f \circ g$ sur $\mathbb{R}$ par $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Remarque : Il faut faire bien attention aux ensembles de définition de f, g et $f \circ g$.
En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemple : Avec notre exemple précédent :
$(g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x + 1$ alors que $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+1}$ et de plus $f \circ g$ est défini sur $\mathbb{R}$ alors que $g \circ f$ est quant à lui défini sur $\mathbb{R}^+$.

IV. Sens de variation d'une fonction

1) Définition

Définition 12 : Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et $I \subset \mathcal{D}_f$.
Si, pour tout réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$,

- $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, alors f est croissante sur I.
- $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, alors f est décroissante sur I.

Définition 13 : Une fonction définie sur I est monotone sur I si elle est croissante sur I ou si elle est décroissante sur I.

Minimum - Maximum :

- $f(a)$ est le maximum de f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(a)$
- M est un majorant de f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \leqslant M$.
- $f(b)$ est le minimum de f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(b)$
- m est un minorant de f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \geqslant m$.

Remarque : Le maximum est un certain $f(x)$ alors qu'un majorant pas forcément.

2) Monotonie et Opérations

Théorème 1 : Soit f monotone sur I et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la fonction αf est monotone sur I.
Plus précisément :
- Si $\alpha > 0$, alors f et αf sont de même monotonie.
- Si $\alpha < 0$, alors f et αf sont de monotonie différente.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Théorème 2 : Soient f et g deux fonctions qui sont de même monotonie sur I. Alors la fonction $f+g$ est monotone sur I.
Plus précisément :
- Si f et g sont croissantes, alors $f+g$ est croissante.
- Si f et g sont décroissantes, alors $f+g$ est décroissante.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Théorème 3 : Soient g et f deux fonctions définies sur I et J qui gardent la même monotonie (avec pour tout x de I, $g(x) \in J$).
Alors la fonction $f \circ g$ est monotone sur I :
- Si f et g sont de même monotonie, alors $f \circ g$ est croissante.
- Si f et g sont de monotonie différentes, alors $f \circ g$ est décroissante.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Remarque : Ceci ne marche que pour la composition $f \circ g$ et non pour le *produit* $f \times g$.