Chap 3 :

Logarithme népérien

I. La fonction ln

Dans cette partie on s'intéresse à une fonction un peu particulière : le logarithme népérien.

1) Définition

Définition 1 : On appelle logarithme népérien la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Remarque : Cette fonction est bien unique.

2) étude de la fonction

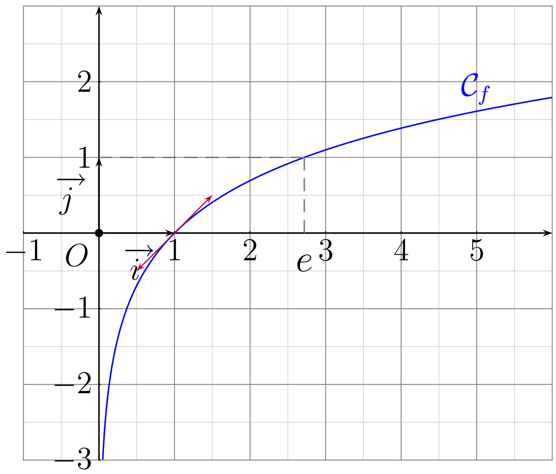
Puisque $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ la fonction f' est positive sur $]0\,;+\infty[$ et donc

Théorème 1 : La fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

On a le tableau de variation suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

Remarque : On appelle e le (seul) nombre tel que $\ln(e) = 1$.
On peut alors tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.



II. Propriétés algébriques

1) Comparaison

Proposition 1 : On a
$\ln(a) = \ln(b)$ est équivalent à $a = b$,
$\ln(a) < \ln(b)$ est équivalent à $a < b$.

2) Règles opératoires

On a un théorème fondamental pour les règles opératoires avec le logarithme :

Théorème 2 : Pour tous a et b de $]0\,;+\infty[$ on a : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

De ce résultat découle plusieures formules :

Proposition 2 : Pour tous a et b de $]0\,;+\infty[$ on a :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b),$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b),$$

$$\ln\left(a^n\right) = n\ln(a) \quad \text{pour tout entier } n,$$

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a).$$