Chap 3 :

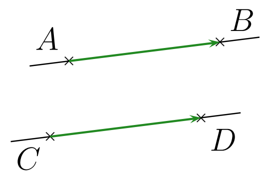
Géométrie vectorielle

I. Rappels

1) Définition

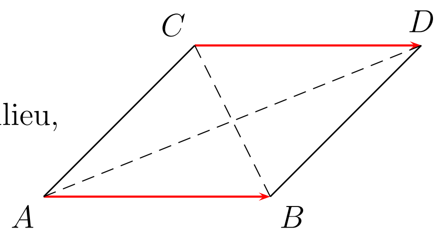
Définition 1 : le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ est caractérisé par
- sa direction : la droite (AB),
- son sens : $A \to B$,
- sa norme ou longueur : $\|\overrightarrow{u}\| = AB$.

Définition 2 : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ s'ils ont :
même direction ((AB) et (CD) sont parallèles),
même sens et
même norme ($AB = CD$).
On dit que ce sont deux représentants du même vecteur.



Remarque : On a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, c'est le vecteur nul.

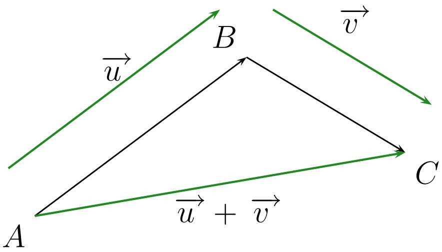
Théorème 1 : caractérisation du parallélogramme
$ABDC$ est un parallélogramme :
soit : si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$,
soit : si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu,
soit : si et seulement si D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



2) Addition de vecteurs

On peut représenter la somme de deux vecteurs à l'aide de deux représentants mis « bout à bout » :

Définition 3 : Soint $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et A un point quelconque; B et C deux points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$.
On peut alors définir $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.



Remarque : La somme de vecteurs représente la « composition » (succession) des translations.

Remarque : L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ s'appelle la relation de Chasles.

Proposition 1 : On a :
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$,
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

Définition 4 : Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur. On définit $-\overrightarrow{u}$ comme le vecteur ayant même direction que $\overrightarrow{u}$, sens contraire à $\overrightarrow{u}$ et même norme que $\overrightarrow{u}$. C'est $\overrightarrow{BA}$.

Définition 5 : On définit $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ par $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$.
Cette définition bien qu'apparemment « compliquée », correspond à l'idée intuitive de la différence de deux vecteurs.

Exemple : On a ainsi par exemple $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$.
(Ce qui paraît quand même assez logique.)
De même $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$.

II. Multiplication par un réel

On peut multiplier les vecteurs par des réels (et UNIQUEMENT par des réels).

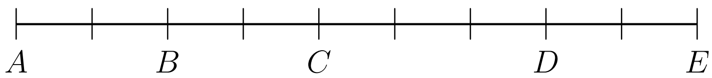
1) Définition

Définition 6 : Le produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\overrightarrow{u}$ défini par

- si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $k = 0$: $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$,
- si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $k > 0$: $k\overrightarrow{u}$ a même direction et même sens que $\overrightarrow{u}$ et sa norme vaut $\|k\overrightarrow{u}\| = k\|\overrightarrow{u}\|$,
- si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $k < 0$: $k\overrightarrow{u}$ a même direction et sens opposé à $\overrightarrow{u}$ et sa norme vaut $\|k\overrightarrow{u}\| = -k\|\overrightarrow{u}\|$.

Remarque : Dans le deux derniers cas on a $\|k\overrightarrow{u}\| = |k| \times \|\overrightarrow{u}\|$.

Exemple : A l'aide de la droite graduée ci-dessous on constate par exemple que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ ou encore $\overrightarrow{EC} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.



Proposition 2 : on a

- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$,
- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$,
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$,
- $k(k'\overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$,
- $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$,
- $(-1).\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.

Remarque : Cette proposition n'est pas aussi compliquée qu'elle peut en avoir l'air.
Ce sont des propriétés « évidentes ».

Exemple : On a par exemple $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$,
$\frac{1}{3}(6\overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AB}$,
et si $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ alors $A = B$.

2) Colinéarité

Définition 7 : On dit que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un réel.
C'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\,\overrightarrow{u}$.
k est appelé le coefficient de colinéarité.

Remarque : C'est la même chose que de dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même direction.

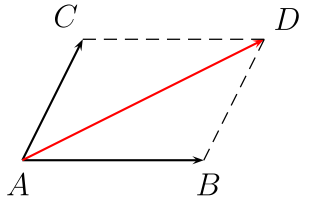
Convention : $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Théorème 2 :
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires <u>si et seulement si</u> (AB) et (CD) sont parallèles (voire confondues).
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires <u>si et seulement si</u> A, B et C sont alignés.

III. Applications géométriques

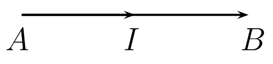
1) Parallélogramme

Théorème 3 : Règle du parallélogramme
$ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



2) Milieux

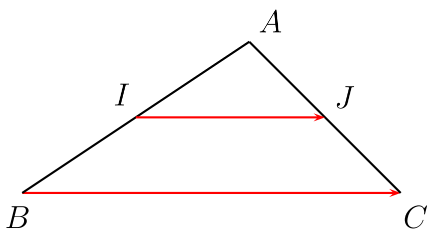
Proposition 3 : I est le milieu de $[AB]$
si et seulement si $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{0}$ ou bien
si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$.



Théorème 4 : Droite des milieux

Soit ABC un triangle,

- Si I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$ alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- Et inversement si $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ alors I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$.



3) Centre de gravité

Proposition 4 : Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$, B' celui de $[AC]$ et C' celui de $[AB]$.
G est le centre de gravité du triangle ABC :

- si et seulement si $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$,
- ou si et seulement si $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$,
- ou si et seulement si $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.