Chap 2 :

Fonctions dérivées

I. Définition

1) Définition

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur I.
On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
On appelle fonction dérivée de f la fonction f' : $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$.

Vocabulaire : Dans le domaine économique il existe un vocabulaire spécifique :
si $C(q)$ représente le coût total de production de q objets,
$\dfrac{C(q)}{q}$ représente le coût unitaire (ie: pour 1 objet)
et $C'(q)$ le coût marginal.

2) fonctions de référence

Il existe une fonction dérivée pour chacune des fonctions de référence.

Dans ce tableau n est un entier positif.

$f(x) =$	$f'(x) =$
constante	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

II. Opérations

Il existe plusieurs règles opératoires pour la dérivation des fonctions, pour une somme, un produit, un quotient de fonctions ...

Proposition 1 : Soit k un nombre réel et f une fonction définie et dérivable sur I.
kf est alors dérivable sur I et $\big(kf\big)'(x) = kf'(x)$.
On note souvent $\big(kf\big)' = kf'$.

Proposition 2 : Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur I.
$f+g$ est alors dérivable sur I et $\big(f+g\big)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
On note souvent $\big(f+g\big)' = f' + g'$.

Proposition 3 : Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur I.
fg est alors dérivable sur I et $\big(fg\big)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
On note souvent $\big(fg\big)' = f'g + fg'$.

Remarque : On a notamment $\big(f^2\big)' = 2f'f$.

Proposition 4 : Soit f une fonction définie, dérivable sur I et qui ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$.
On note souvent $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

Proposition 5 : Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur I. Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.
On note souvent $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Et enfin

Proposition 6 : Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur des intervalles permettant de définir $h : x \mapsto f\big[g(x)\big]$.
La fonction h est dérivable et $h'(x) = f'\big[g(x)\big].g'(x)$.

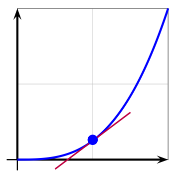
Exemple : On peut notamment appliquer ce résultat pour des fonctions du type $u : x \mapsto f(ax+b)$ ou $v : x \mapsto \big[f(x)\big]^n$.
On a alors $u'(x) = a.f'(ax+b)$ et $v'(x) = n.f'(x).\big[f(x)\big]^{n-1}$.

III. Sens de variation

On dispose d'un théorème fondamental pour l'étude des fonctions, il fait un lien entre le signe de la fonction dérivée f' et le sens de variation de la fonction f.

Théorème 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.
- Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque : Ce résultat ne choque pas l'intuition car si en un point de la courbe $\big(x_0; f(x_0)\big)$ le nombre dérivé $f'(x_0)$ est positif alors autour de ce point la fonction est croissante car c'est le coefficient directeur de la tangente. Et donc si la dérivée est positive sur I, f est bien croissante sur I.



Dans la pratique, pour déterminer les variations d'une fonction f, on calcule sa dérivée f', on en cherche le signe (en factorisant le plus possible f') et on découpe son ensemble de définition en intervalles sur lesquels f' est de signe constant.
On peut alors mettre les résultats dans le tableau de variations de f.

Exemple : Prenons la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ on a $f'(x) = 2x$ et donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

IV. Extrema

1) définition

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit c un réel intérieur à I.
(c distinct des bornes de I).

- On dit que f présente un maximum local en c si $f(c)$ est le maximum de f « autour » de c.
- On dit que f présente un minimum local en c si $f(c)$ est le minimum de f « autour » de c.
- Un extremum local est un maximum local ou un minimum local.

Remarque : Le pluriel « d'extremum » est « extrema ». Il en est de même pour « minimum » et « maximum ».

2) une condition nécessaire

Théorème 2 : Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

A quoi ca sert ? : Cette propriété sert, par exemple en économie, à optimiser la fonction bénéfice liée à une production industrielle en cherchant le maximum de cette fonction.

Remarque : Cette propriété n'est pas vraie dans les deux sens.
En effet, par exemple, la fonction cube $f(x) = x^3$ est telle que $f'(0) = 0$ mais malgré cela f n'admet pas d'extremum local en 0.