Chap 1 :

Polynômes

I. Trinôme du second degré

Définition 1 : Un trinôme du second degré est une expression de la forme ax^2+bx+c, avec $a \neq 0$.

Remarque : Un trinôme du second degré est défini sur $\mathbb{R}$.

Nous allons déterminer une technique pour résoudre ***toutes*** les équations du type $ax^2+bx+c=0$ appelées équation du second degré.

1) Forme canonique du trinôme

On sait résoudre les équations suivantes :

- $x^2-3=0$
- $(x+2)^2-5=0$
- $3\left((x+1)^2-\dfrac{2}{3}\right)=0$

En fait on a $3\left((x+1)^2-\dfrac{2}{3}\right)=3x^2+6x+1$ mais les deux formes ne sont pas toutes les deux aussi pratiques pour résoudre $3x^2+6x+1=0$ qui est souvent la forme sous laquelle l'équation apparaît.

La forme $3\left((x+1)^2-\dfrac{2}{3}\right)$ s'appelle la forme canonique du trinôme $3x^2+6x+1$.

L'idée intéressante c'est qu'on peut toujours résoudre une équation du second degré lorsque le trinôme est sous forme canonique et on peut toujours mettre un trinôme sous forme canonique.

Proposition 1 : Pour tout trinôme on a : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

2) Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$

Pour résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ c'est donc le signe de $b^2 - 4ac$ qui nous intéresse.

Définition 2 : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, on appelle discriminant de $P(x) = 0$, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

On a alors :
$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$ car $a \neq 0$.

- Si $\Delta < 0$, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc l'équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ d'où $x = -\dfrac{b}{2a}$ est racine double.
- Si $\Delta > 0$, alors $\Delta = \sqrt{\Delta^2}$ puis $P(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = 0$
  qu'on peut factoriser en $\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
  sont donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x) = 0$.

Théorème 1 : Soit S l'ensemble des solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.
Si $\Delta < 0$, $S = \emptyset$.
Si $\Delta = 0$, $S = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
Si $\Delta > 0$, $S = \left\{\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Remarque : Si a et c sont de signes contraires, on a $\Delta > 0$.

3) Factorisation et racines

Proposition 1 : (HP) Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales dans le cas d'une racine double) alors, $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Exemple : On peut le vérifier sur l'exemple $x^2 - 3x + 2 = 0$.

On a également une sorte de réciproque :

Proposition 2 : (HP) Si deux nombres ont pour somme S et pour produit P alors ils sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

On peut toujours factoriser un trinôme qui a des racines :

Théorème 2 : Si le trinôme ax^2+bx+c admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales) alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

4) Signe du trinôme

Dans chacun des trois cas pour Δ on peut déterminer le signe du trinôme en fonction de x grâce à la forme canonique.

- Si $\Delta < 0$: $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ est du signe de a et donc ax^2+bx+c aussi.

- Si $\Delta = 0$: $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\right]$ est aussi du signe de a sauf pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ (il est alors nul).

- Si $\Delta > 0$: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ et ainsi pour déterminer son signe il suffit de faire un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		-	0	+		+	
$(x-x_2)$		-		-	0	+	
$(x-x_1)(x-x_2)$		+	0	-	0	-	
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

$\longrightarrow$ *penser à multiplier par a*

On peut ainsi résumer la situation avec le théorème suivant :

Théorème 3 : De la forme canonique du trinôme, on déduit :
Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a.
Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ (il est alors nul).
Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ est :

- du signe de a à l'extérieur des racines.
- du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

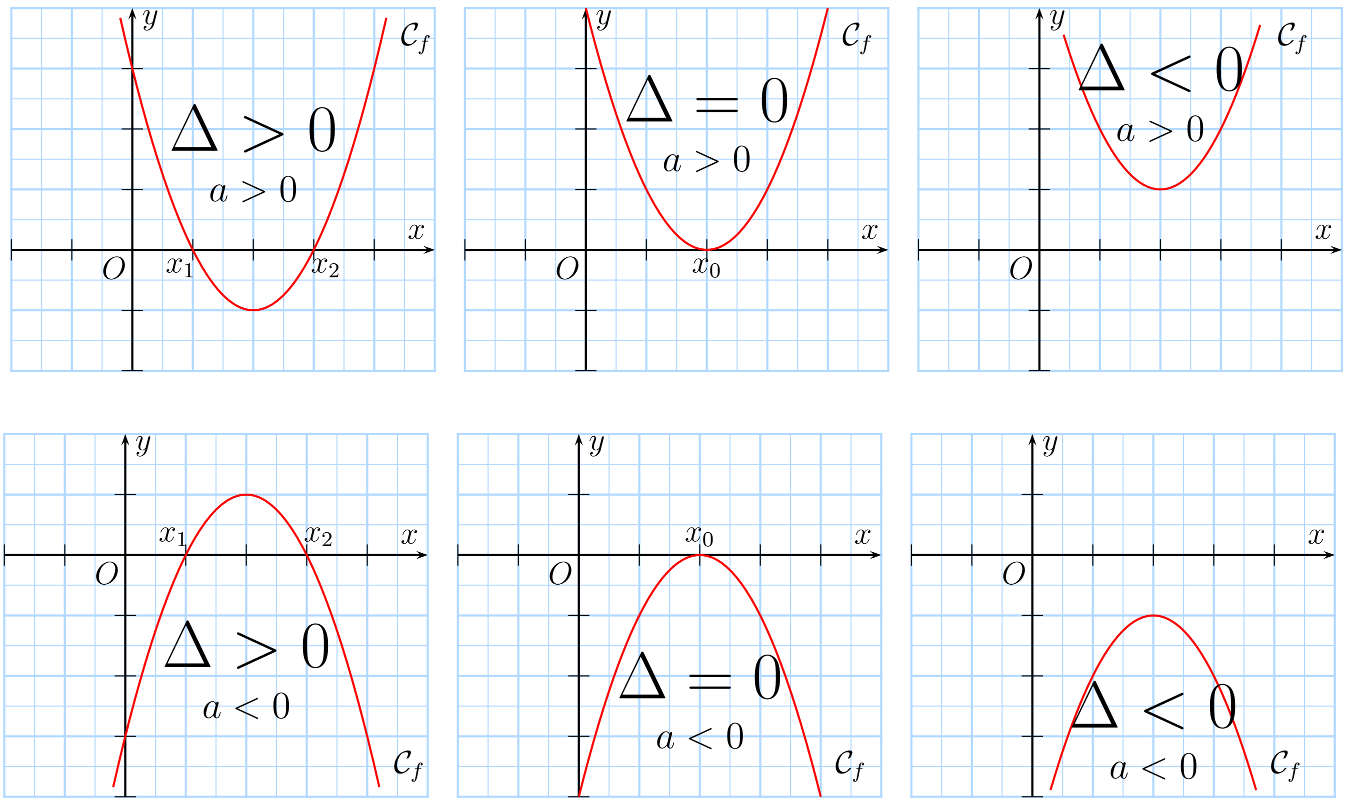
Ce qui donne sous forme de tableau

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

$\longrightarrow$ *démonstration*

5) Interprétation géométrique

On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array} \right.$.
On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
On peut retrouver les résultats des théorèmes précédents sur $\mathcal{C}_f$:



II. Polynômes

1) Définition

On commence par définir les fonctions polynômes qui sont des outils très utiles en Analyse.

Définition 3 : Une fonction polynôme est une fonction $P \; : \; \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

où a_0 , a_1 , ..., a_n sont des nombres réels et où n est un entier naturel.

Vocabulaire : Les nombres réels a_0 , a_1 , ..., a_n s'appellent coefficients du polynôme P.
On lit a « indice » n.
Le nombre $a_p x^p$ s'appelle le terme de degré p du polynôme P.
Le nombre $a_0 x^0 = a_0$ s'appelle le terme constant du polynôme P.

Exemple : $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = -2 + 5x - 3^5$, $h(x) = 21$...

2) Degré

Définition 4 : Si $a_n \neq 0$, n est le degré de P. On note $n = \deg P$.

Remarque : Un polynôme constant non nul ($\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 \neq 0$) a pour degré 0.
Le polynôme nul n'a pas de degré.

Proposition 2 : Si P et Q sont deux polynômes non nuls, alors $\deg PQ = \deg P + \deg Q$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Théorème 4 : On a l'équivalence suivante $P = Q \Leftrightarrow \begin{cases} \deg P = \deg Q \\ \text{les coefficients de } P \text{ et } Q \text{ sont identiques.} \end{cases}$

$\longrightarrow$ *démonstration faisable avec le cours sur les limites, sinon admise.*

Corollaire 1 : Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
Plus précisément, pour tout x réel on a :
$P(x) = a_n x_n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \Longleftrightarrow a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ \ldots,\ a_n = 0.$

$\longrightarrow$ *démonstration*

3) Factorisation

Définition 5 : Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$. On appelle racine (ou zéro) de P tout nombre a tel que $P(a) = 0$.

Définition 6 : On dit qu'un polynôme P est factorisable par $(x - a)$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout x réel : $P(x) = (x - a)\,Q(x)$

Avec ces définitions on a le théorème **fondamental** suivant :

Théorème 5 : (HP) a est racine de $P \Longleftrightarrow P$ est factorisable par $(x - a)$.

$\longrightarrow$ *démonstration admise car longue et peu intéressante en 1°S.*

Remarque : $\left\{\begin{array}{l}\deg P = n \\ P(x) = (x-a)\,Q(x)\end{array}\right. \Rightarrow \deg Q = n - 1$

On peut en déduire une technique pour *complètement* factoriser un polynôme :
la technique par identification des coefficients.

Exemple : Pour factoriser le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ il faut connaître au moins une racine.
Pour cela on calcule quelques valeurs, par exemple $P(0), P(1)$ et $P(-1)$.
Une fois qu'on a une racine on peut écrire $P(x) = (x+1)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2. On peut écrire $Q(x) = ax^2 + bx + c$ et en développant $(x+1)(ax^2+bx+c)$ on **doit** retrouver P d'où un système à 3 équations et 3 inconnues à résoudre.
$\longrightarrow P(x) = (x+1)(x+2)(x-2)$.