Chap 12 :

Tests d'hypothèses

I. Principe

Si on considère une machine d'usinage d'une production industrielle on sait pertinement que cette machine va finir par se dérègler petit à petit.
Si on laisse trop la machine se dérégler il va y avoir beaucoup de pièces non conformes et si on augmente trop souvent les réglages de la machine le coût de production des pièces augmente fortement , il faut donc un juste milieu entre les deux.
C'est pourquoi on surveille la production en prenant de temps en temps des échantillons. On leur fait subir des tests mais comme se ne sont que des échantillons il faut ***décider*** s'ils sont acceptables ou non.

Le but de ce chapitre est de construire un test pour échantillon qui permette de prendre une décision sur la conformité ou non d'une production. On parle de validité d'hypothèse.
Pour construire un tel test on va s'appuyer sur le cours sur les estimations qu'on a déjà vu (chap 9).

II. Test pour une moyenne

1) Construction du test

On va raisonner sur l'exemple d'une machine A qui produit en grand nombre des pièces métalliques (500 par jours) qui servent de poids, la masse m de chacun de ces poids étant sensé être de $780g$. Bien sûr les poids n'ont pas tous la même masse, et la question est de savoir si la machine est déréglée ou non.
On réalise donc des échantillons de 36 pièces prises au hasard dans la production sur lesquels on mesure la masse moyenne.
On sait par des études préalables (par exemple grâce à une estimation ponctuelle $\sigma = 12,5$ de l'écart-type) que la variable aléatoire X_A qui à chaque échantillon de 36 pièces associe sa masse moyenne suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}\left(m; \dfrac{12,5}{\sqrt{36}}\right)$.
En faisant l'hypothèse $m = 780g$ on obtient ainsi l'intervalle de confiance $[775,92; 784,08]$ pour la masse m avec le coefficient de confiance $0,95$ c'est-à-dire qu'il y a 95% de chances que la masse moyenne de notre échantillon soit dans l'intervalle $[775,92; 784,08]$.
Pour $m = 780g$ on parle d'hypothèse nulle notée H_0.
L'autre possibilité, à savoir $m \neq 780g$ s'appelle l'hypothèse alternative H_1.

2) Utilisation du test

Si l'hypothèse H_0 est vraie il n'y a que 5% de chances de prélever un échantillon aléatoire de taille 36 dont la masse moyenne ne soit pas dans $[775,92; 784,08]$.
On crée ainsi une règle :

Règle 1 : Lorsqu'on prélève un échantillon de taille 36 et qu'on calcule sa moyenne $\overline{x}$,
- si $\overline{x}$ est dans $[775,92; 784,08]$, on accepte l'hypothèse H_0
- si $\overline{x}$ n'est pas dans $[775,92; 784,08]$, on rejette l'hypothèse H_0 (on accepte donc H_1).

On parle de région critique au seuil de 5% pour l'extérieur de l'intervalle $[775,92; 784,08]$.

Remarque : Le seuil 5% est la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie.
On peut être tenté de diminuer ce seuil à 1% par exemple. L'intervalle de confiance devient alors $[774,62; 785,38]$ avec le coefficient de confiance $0,99$ mais là on a un autre risque c'est celui d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse.
Il faut donc choisir judicieusement la valeur du seuil.

Remarque : Le test de notre exemple est appelé test bilatéral.
On pourrait aussi se poser la question « la masse moyenne des poids est-elle strictement inférieure à $780g$? »,
notre hypothèse nulle H_0 serait alors $m = 780g$ et
notre hypothèse alternative H_1 serait $m < 780g$.
On parle alors de test unilatéral.
(Voir les exos pour les détails sur les calculs.)

III. Test pour une fréquence

Pour un test d'hypothèse concernant une mesure de fréquence le principe reste le même mais c'est le calcul de l'intervalle de confiance qui change, il est donné par le cours sur les estimations d'une fréquence.

IV. Test pour une différence de moyennes ou de fréquences

1) pour des moyennes

Supposons qu'une deuxième machine B produise les mêmes pièces mais qu'elle en produise 800 par jour et que les échantillons que l'on fait sur cette machine soient de 50 pièces.
On souhaite comparer les masses moyennes m_A et m_B des pièces des deux machines. La situation est alors compliquée par le fait que les échantillons n'ont pas la même taille.
Par une étude préalable on sait que la variable aléatoire X_B qui à chaque échantillon de 50 pièces de B associe sa masse suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}\left(780; \dfrac{12,1}{\sqrt{50}}\right)$.
On note $D = X_B - X_A$ et en supposant que X_A et X_B sont indépendantes on a que D suit une loi normale d'espérance $780 - 780 = 0$ et d'écart-type $\sqrt{\dfrac{12,5^2}{36} + \dfrac{12,1^2}{50}} \approx 2,7$ c'est-à-dire la loi $\mathcal{N}(0; 2,7)$.
L'intervalle de confiance pour D avec le coefficient de confiance 0,95 est alors $[-5,29; 5,29]$.
On peut alors prendre pour hypothèse nulle H_0 : « $m_A = m_B$ »
et pour hypothèse alternative H_1 : « $m_A \neq m_B$ ».
Et comme règle :
on prend un échantillon de chaque machine, on mesure leur masse moyenne x_A et x_B et on note $d = x_A - x_B$.
Si d est dans $[-5,29; 5,29]$ on accepte l'hypothèse H_0.
Si d n'est pas dans $[-5,29; 5,29]$ on rejette l'hypothèse H_0.

2) pour des fréquences

Là encore le principe reste le même c'est juste le calcul des intervalles de confiance qui changent.