Chap 11 :

Equations différentielles du second degré

En classe de BTS MAI on se limite aux cas des équations différentielles du second degré avec des coefficients constants, c'est-à-dire aux équations faisant intervenir une fonction y définie sur un intervalle I, sa dérivée y' et sa dérivée seconde y'' (il faut bien sur que la fonction y soit deux fois dérivable sur I) du type

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

dans laquelle a, b et c sont des constantes réelles données (avec $a \neq 0$) et d une fonction donnée, dérivable sur I.

I. Equation sans second membre

Se sont les équations pour lesquelles il n'y a pas de second membre c'est-à-dire que $d(t) = 0$:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

De la même manière que pour les équations différentielles de degré 1, on cherche des solutions exponentielles c'est-à-dire sous la forme $f(t) = \mathrm{e}^{rt}$ où r est un nombre complexe fixé.
On a alors $f'(t) = r\mathrm{e}^{rt}$ et $f''(t) = r^2\mathrm{e}^{rt}$ donc si on injecte f dans l'équation on obtient :
$ar^2\mathrm{e}^{rt} + br\mathrm{e}^{rt} + c\mathrm{e}^{rt} = 0$ puis $(ar^2 + br + c)\mathrm{e}^{rt} = 0$ et donc $ar^2 + br + c = 0$ car $\mathrm{e}^{rt} \neq 0$.

Cette équation de degré deux s'appelle l'équation caractéristique de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.

Si r est une solution de l'équation caractéristique la fonction $f(t) = \mathrm{e}^{rt}$ est alors une solution de l'équation différentielle.

Suivant le calcul du discriminant trois cas apparaissent.
On les étudie sur des exemples.

1) cas où $\Delta > 0$

Exemple : Pour l'équation $y'' - 4y' + 3y = 0$ l'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$.

Son discriminant vaut $\Delta = \ldots$ et donc les solutions sont $r_1 = \ldots$ et $r_2 = \ldots$.
Les fonctions $f_1(t) = \mathrm{e}^t$ et $f_2(t) = \mathrm{e}^{3t}$ sont donc des solutions de l'équation différentielle et ainsi toute fonction du type $f(t) = k_1\mathrm{e}^t + k_2\mathrm{e}^{3t}$, avec k_1 et k_2 deux constantes, est une solution de l'équation différentielle.

En fait ***toutes*** les solutions de $y'' - 4y' + 3y = 0$ sont de la forme
$f(t) = k_1\mathrm{e}^t + k_2\mathrm{e}^{3t}$, avec k_1 et k_2 deux constantes.

2) cas où $\Delta = 0$

Exemple : Pour l'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$ l'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$.

Son discriminant vaut $\Delta = \ldots$ et donc il y a une seule solution à savoir $r = \ldots$.
La fonction $f(t) = \mathrm{e}^{2t}$ est donc une solution de l'équation différentielle.
On peut voir que la fonction $g(t) = t\mathrm{e}^{2t}$ est aussi solution de l'équation différentielle :
$g'(t) = \ \ldots\ldots\ldots$ et $g''(t) = \ \ldots\ldots\ldots$ et ainsi $g''(t) - 4g'(t) + 4g(t) = \ldots$.
Ainsi toute fonction du type $f(t) = k_1\mathrm{e}^{2t} + k_2t\mathrm{e}^{2t}$, avec k_1 et k_2 deux constantes, est une solution de l'équation différentielle.

En fait ***toutes*** les solutions de $y'' - 4y' + 4y = 0$ sont de la forme
$f(t) = k_1\mathrm{e}^{2t} + k_2t\mathrm{e}^{2t}$, avec k_1 et k_2 deux constantes.

3) cas où $\Delta < 0$

Exemple : Pour l'équation $y'' - 2y' + 5y = 0$ l'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$.

Son discriminant vaut $\Delta = \ldots$ et donc les solutions sont $r_1 = \ldots\ldots$ et $r_2 = \ldots\ldots$.
Les fonctions $f_1(t) = \ \ldots\ldots \ = \mathrm{e}^t\big(\cos(2t) - i\sin(2t)\big)$ et $f_2(t) = \ \ldots\ldots \ = \mathrm{e}^t\big(\cos(2t) + i\sin(2t)\big)$ sont donc des solutions de l'équation différentielle.
Et ainsi toute fonction du type $f(t) = m_1f_1(t) + m_2f_2(t)$, avec m_1 et m_2 deux constantes, est une solution de l'équation différentielle.
On préfère réécrire ces solutions sous la forme (équivalente) $f(t) = k_1\mathrm{e}^t\cos(2t) + k_2\mathrm{e}^t\sin(2t)$ avec k_1 et k_2 deux constantes.

En fait ***toutes*** les solutions de $y'' - 2y' + 5y = 0$ sont de la forme
$f(t) = k_1\mathrm{e}^t\cos(2t) + k_2\mathrm{e}^t\sin(2t)$, avec k_1 et k_2 deux constantes.

4) Cas général

En résumé on a le théorème suivant :

Théorème 1 : Pour l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ on a l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$ il y a deux racines r_1 et r_2 à l'équation caractéristique et les solutions de l'équation différentielle sont les $f(t) = k_1\mathrm{e}^{r_1t} + k_2\mathrm{e}^{r_2t}$.

- Si $\Delta = 0$ il n'y a qu'une racine r à l'équation caractéristique et les solutions de l'équation différentielle sont les $f(t) = (k_1 + k_2t)\mathrm{e}^{rt}$.

- Si $\Delta < 0$ il y a deux racines complexes $\alpha \pm i\beta$ à l'équation caractéristique et les solutions de l'équation différentielle sont les $f(t) = \big(k_1\cos(\beta t) + k_2\sin(\beta t)\big)\mathrm{e}^{\alpha t}$.

Et pour chaque cas on a k_1 et k_2 qui sont deux constantes.

Remarque : Si on souhaite déterminer ***une*** solution particulière, il nous faut <u>deux</u> conditions car il y a deux constantes à déterminer (k_1 et k_2).
Ces conditions peuvent être multiples mais le plus souvent ce sont des conditions du genre « $f(0) = 3$ et $f'(0) = -4$ » ou « $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$ ».

II. Equation avec second membre

En classe de BTS MAI on ne s'intéresse qu'à des seconds membres de type fonctions polynomiales, fonctions trigonométriques ou fonctions exponentielles (ainsi que des mélanges des trois).

Vous aurez systématiquement des indications pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre.
Néanmoins une solution particulière est souvent trouvable sous la même forme que le second membre (un polynôme si d est un polynôme, un produit d'un polynôme par une exponentielle si d est de cette forme ...)

Et de même que dans le cas des équations du premier ordre toutes les solutions sont données par le théorème :

Théorème 2 : L'ensemble des solutions de l'équation $ay''(t)+by'(t)+cy(t) = d(t)$ sont les fonctions $g(t) = f(t) + f_0(t)$ où f_0 est une solution particulière et f l'une des solutions de l'équation homogène (c'est-à-dire sans second membre) $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$.