Chap 10 :

Développements limités

I. Approximation affine

On sait déjà que si f est une fonction définie et dérivable sur I alors pour tout nombre a de I on a l'approximation, pour h « petit » : $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.
Une autre façon de le dire : la tangente en a à la courbe représentative de f est assez proche de la courbe autour du point a.
On a ainsi approché $f(a+h)$ par un polynôme de degré 1 en h.
On dit qu'on a un développement limité de f à l'ordre 1 en a .

Le but de ce chapitre est d'approcher $f(a+h)$ par des polynômes de degré 2, 3, ... n afin d'augmenter la précision de l'approximation. (A priori plus n est grand plus l'approximation est fine.)

II. Inégalités de Taylor

Propriété 1 : Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I telle que pour tout x de I on ait $|f''(x)| \leqslant M$ alors pour tout a et x de I on a
$|f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)| \leqslant M\dfrac{(x-a)^2}{2}$.

On a également :

Propriété 2 : Soit f une fonction définie et trois fois dérivable sur I telle que pour tout x de I on ait $|f'''(x)| \leqslant M$ alors pour tout a et x de I on a

$$\left| f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) \right| \leqslant M\frac{(x-a)^3}{3!}.$$

Ces inégalités s'appellent inégalités de Taylor à l'ordre 2, 3 et en fait des propriétés de ce type existent pour n'importe quel nombre de dérivations de f.

Application : Prenons la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ sur $I = [-1;1]$ et $a = 0$.
On a $f'(x) = \mathrm{e}^x$, $f''(x) = \mathrm{e}^x$, ... Ainsi $f'(0) = 1$, et sur I on a $|f''(x)| \leqslant 3$ ainsi pour tout x de I on a $|f(x) - f(0) - xf'(0)| \leqslant 3\ \dfrac{x^2}{2}$ puis $\dfrac{|f(x) - f(0) - xf'(0)|}{x} \leqslant 3\ \dfrac{x}{2}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|f(x) - f(0) - xf'(0)|}{x} = 0$ qu'on peut réécrire $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. C'est- à-dire $\mathrm{e}^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
C'est le développement limité de e^x à l'ordre 1 en 0.
On a de même pour tout x de I $|f'''(x)| \leqslant 3$ et donc pour tout x de I :
$\left| f(x) - f(0) - xf'(0) - \dfrac{x^2}{2}f''(0) \right| \leqslant 3\ \dfrac{x^3}{3!}$. ou encore $f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(0) + x^2\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
$\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ est le développement limité de e^x à l'ordre 2 en 0.

III. Développements limités

Définition 1 : On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 s'il existe des nombres $a_0, a_1, \dots a_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n + x^n \varepsilon x \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Propriété 3 : Si f admet $a_0 + a_1 x + x\varepsilon(x)$ comme développement limité à l'ordre 1 en 0 alors $f(0) = a_0$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.
L'intérêt est dans ce cas de **ne pas** calculer la dérivée mais d'obtenir $f'(0)$ malgré tout.

1) Fonctions usuelles

On a les développements limités à l'ordre n en 0 suivants :

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

Pour tout α :

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

et notamment pour $\alpha = -1$:

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

$$\boxed{\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

2) Règles de calcul

Propriété 4 : Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0 alors

- $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 en faisant la somme de celui de f et de celui de$g$,
- $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 en faisant le produit de celui de f et de celui de g et en supprimant les termes de trop haut degré.