Chap 7 :

Probabilités

I. Vocabulaire

On parle *d'expérience aléatoire* dès qu'une expérience a plusieurs issues possibles et que celles-ci ne peuvent être ni prévues ni calculées.

Exemple : Afin d'illuster les différentes définitions on prend pour tout le chapitre un exemple simple d'expérience aléatoire : le résultat d'un lancer de dé à six faces.

Définition 1 : Dans une *expérience aléatoire*, on appelle *univers* l'ensemble de toutes les *issues* possibles. On note souvent cet ensemble Ω.

Exemple : Dans notre exemple c'est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

Définition 2 : On appelle *événement* toute *partie* de l'univers.
Si cette partie n'a qu'un élément on parle *d'événement élémentaire*.

Exemple : Par exemple, *l'événement* $\{1;2;6\}$ est composé des trois *événements élémentaires* $\{1\}, \{2\}$ et $\{6\}$.

Remarque : Ω est l'événement certain. Il est toujours réalisé.
$\emptyset$ est l'événement impossible. Il n'est jamais réalisé.

Définition 3 :
- L'événement « A ou B », noté $A \cup B$ est obtenu en regroupant les événements élémentaires contenus dans A ou dans B.
- L'événement « A et B », noté $A \cap B$ est obtenu en ne gardant que les événements élémentaires communs à A et B.

Définition 4 : On appelle *événement contraire* de A la partie de Ω composée de toutes les issues qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$.

Exemple : Dans notre exemple on a $\overline{\{1;2\}} = \{3;4;5;6\}$.

Définition 5 : On dit que deux événements A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \varnothing$.

Exemple : Les événements $\{2;5\}$ et $\{1;3;4\}$ sont *incompatibles*.

II. Calcul des probabilités

1) Définition

La *probabilité* d'un événement A représente les « chances » qu'a l'événement A de se réaliser effectivement. On le note $P(A)$.

Définition 6 : La *probabilité* d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires de A.

Exemple : On a ainsi $P(«1») = P(«2») = P(«3») = P(«4») = P(«5») = P(«6») = \dfrac{1}{6}$ et donc $P\big(\{1;5\}\big) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Remarque : On a **toujours** $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
On a **toujours** $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.

Remarque : Il faut distinguer les *probabilités* des *fréquences d'apparition* (en Statistiques).

2) Propriétés du calcul de probabilités

On a les propriétés calculatoires suivantes :

Proposition 1 : On a : $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

Exemple : Dans notre exemple on a $P\left(\overline{\{1;2\}}\right) = P\big(\{3;4;5;6\}\big) = \dfrac{4}{6}$ et on a bien $P\left(\overline{\{1;2\}}\right) = 1 - \dfrac{2}{6} = \dfrac{4}{6}$.

Théorème 1 : On a : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Exemple : Dans notre exemple on a $P\big(\{2;4\}\cup\{1;2;5\}\big)=P\big(\{1;2;4;5\}\big)=\dfrac{4}{6}$ et on a bien
$P\big(\{2;4\}\cup\{1;2;5\}\big)=P\big(\{2;4\}\big)+P\big(\{1;2;5\}\big)-P\big(\{2\}\big)=\dfrac{2}{6}+\dfrac{3}{6}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{6}$.

Remarque : Il n'y a **pas de formule** pour l'intersection $A\cap B$ de deux événements.

3) Equiprobabilité

Il existe un cas particulier plus simple : *l'équiprobabilité*

Définition 7 : On dit qu'il y a *équiprobabilité* lorsque tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité.
S'il y a équiprobabilité : $P(A)=\dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments total}}$.

Remarque : C'est le cas dans notre exemple de lancer de dé mais c'est en fait rarement le cas.