Chap 5 :

Nombres complexes

I. Présentation

1) Forme algébrique

En mathématiques la lettre i (i comme *imaginaire*) a une signification bien particulière :
On note i le «nombre» tel que $i^2 = -1$.
Un tel nombre n'existe pas parmi les nombres réels, c'est en quelque sorte une écriture de $\sqrt{-1}$.

Définition 1 : On appelle *nombre complexe* tout «nombre» z qui s'écrit sous la forme $z = a + bi$, où a et b sont des nombres réels.
L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

Exemple : $2i$, $1-3i$, $\sqrt{2}\,i$, $\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\,i \ldots$ sont des nombres complexes.

Définition 2 : Soit $z = a + bi$.
On appelle *partie réelle* de z le nombre a, il se note $\mathfrak{Re}(z)$.
On appelle *partie imaginaire* de z le nombre b, il se note $\mathfrak{Im}(z)$.

Remarque : On appelle cette écriture $a + bi$ la *forme algébrique* de z.

2) Règles de calcul

Les règles de calcul que l'on connaît déjà restent valables pour les nombres complexes, il suffit juste d'y ajouter : $i^2 = -1$.

Proposition 1 : Pour $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ on a :
$z = z'$ si et seulement si $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$,
$z + z' = (a + a') + (b + b')i$,
$5z = 5a + 5bi$, (de même avec 2,-4 …)
$z \times z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$. (il suffit de faire le calcul)

Exemple : Pour $z = 2 + 3i$ et $z' = -1 + 4i$, calculer $z_2 = 2z + 3z'$ et $z_3 = (z + 1)(i + z)$.

3) Conjugué

Définition 3 : On appelle *conjugué* de z le nombre noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - bi$.

Exemple : On a $\overline{1-2i} = 1+2i$.

Remarque : La quantité conjugué permet de voir $\dfrac{1}{z}$ comme un nombre complexe lui aussi.

Proposition 2 : Pour z et z' deux nombres complexes on a :

• $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, • $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, • $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$, • $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

II. Géométrie et nombres complexes

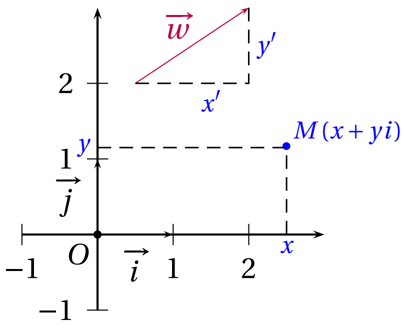
1) Point image - Affixe

On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{v}\right)$.

Définition 4 : On appelle *affixe* de $M\left(x; y\right)$ le nombre $z = x + yi$.

Inversement, on peut associer au nombre complexe $z = a + bi$ son *point image* $M(a; b)$.

On appelle *affixe* de $\overrightarrow{w}\left(x'; y'\right)$ le nombre $z = x' + y'i$.

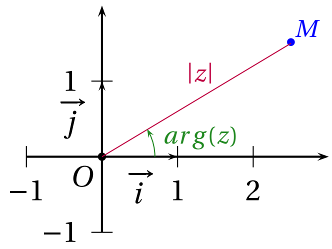


Proposition 3 : Soient M_1 et M_2 deux points du plan d'affixes respectives z_1 et z_2 . On a alors :
$z_2 - z_1$ est l'affixe de $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Soient $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ deux vecteurs d'affixes $z_{\overrightarrow{w}}$ et $z_{\overrightarrow{t}}$. On a alors :
$5z_{\overrightarrow{w}}$ est l'affixe de $5\,\overrightarrow{w}$ (de même avec 2,-4 ...)
$z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{t}}$ est l'affixe de $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{t}$.

2) Module et Argument

Définition 5 : Pour z un nombre complexe de point image M on définit :
le *module* de z, noté $|z|$, c'est la longueur OM,
un *argument* de z, noté $arg(z)$, c'est l'angle $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$.



Remarque : On constate que la donnée de $|z|$ et $arg(z)$ permet de placer exactement le point M et donc que son affixe z est complètement déterminée par $|z|$ et $arg(z)$.

Proposition 4 : On a, pour tous points A et B du plan d'affixes z_A et z_B : $|z_B - z_A| = AB$.

Proposition 5 : Pour tous nombres complexes z et z' on a :
- $|zz'| = |z| \times |z'|$,
- $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$,
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$,
- $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$.

3) Forme trigonométrique

Théorème - Définition : On peut toujours écrire un nombre complexe z sous la forme :
$$z = |z|\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big), \qquad \text{avec } \theta = arg(z).$$
On appelle ceci la *forme trigonométrique* de z.

Il faut savoir passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique d'un nombre complexe et surtout savoir passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique, d'où :

Proposition 6 : Pour tout nombre complexe $z = a + bi$ on a :
- $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- $\theta = arg(z)$ est tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|}, \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|}. \end{cases}$

Exemple : Calculer $|z|$ et $arg(z)$ pour $z = 1 + i$. $\longrightarrow$ *$|z| = \sqrt{2}$ et $arg(z) = \frac{\pi}{4}$.*