Chap 4 :

Suites numériques

I. Vocabulaire et définitions

Le vocabulaire des suites est à très proche de celui des fonctions. En effet, au niveau de la théorie, les suites et les fonctions sont deux facettes d'un même objet mathématique.

1) Définitions

Définition 1 : Une *suite numérique* u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ $u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{array}$.

La suite u est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).

Remarque : u_0 est appelé le *premier terme*, u_1 le *deuxième terme* et de manière générale u_n est appelé le $(n+1)$*-ième* terme.

Définition 2 : En général, une suite est définie :

- Soit de manière explicite (on peut calculer u_n en fonction de n)
  Exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
  Cas particulier : $u_n = f(n)$ avec f une fonction connue.
  Exemple : $u_n = \sqrt{n}$.

- Soit par *récurrence* (on calcule u_n de « proche en proche »)
  Exemple : $u_0 = 2$ est donné et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout n,
  alors on peut calculer les termes $u_1 = 3$, $u_2 = 5 \dots$

2) Sens des variations

Définition 3 :

- (u_n) est *croissante* si et seulement si, pour tout entier n : $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- (u_n) est *décroissante* si et seulement si pour tout entier n : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- (u_n) est *monotone* si et seulement si (u_n) est croissante ou décroissante.

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer le sens de variation (éventuel) d'une suite (u_n) :

Méthodes Pour étudier les variations d'une suite(u_n), on peut :

- Comparer u_{n+1} et u_n.
- Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si $u_n > 0$ pour tout n, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
- Si $u_n = f(n)$, utiliser les variations de $x \mapsto f(x)$.

3) Suites bornées

Définition 4 :

- (u_n) est *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n : $u_n \leqslant M$.
- (u_n) est *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n : $u_n \geqslant m$.
- (u_n) est *bornée* si (u_n) est à la fois majorée et minorée.

II. Suites arithmétiques

1) Définition

Définition 5 : On appelle *suite arithmétique* toute suite (u_n) telle que :
pour tout entier n on ait $u_{n+1} - u_n$ constant.
On note souvent r cette constante. r est appelé la *raison* de la suite.

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] \arrow[rrrrr, bend right, "+5r"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_4 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_5
\end{tikzcd}$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ est arithmétique.

Proposition 1 : En fait si la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r on a pour tout n : $u_n = u_0 + nr$.

$\longrightarrow$ *démonstration avec le « raisonnement par récurrence ».*

Proposition 2 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors :

- si $r < 0$, la suite (u_n) est une suite décroissante ;
- si $r = 0$, la suite est constante ;
- si $r > 0$, la suite (u_n) est une suite croissante.

⟶ *démonstration*

2) Somme de termes consécutifs

Théorème 1 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

On définit S_n par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On a alors : $S_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$.

⟶ *démonstration*

Remarque : On peut réécrire cette formule « en français » :

$$S_n = (\text{nb de termes}) \times \frac{1^{\text{er}}\text{terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Exemple : On a l'exemple fondamental : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

III. Suites géométriques

1) Définition

Définition 6 : On appelle *suite géométrique* toute suite (v_n) telle que :
pour tout entier n on ait $v_{n+1} = q \times v_n$, où q est une constante.
q est appelé la *raison* de la suite.

$$\begin{tikzcd} v_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rrrrr, bend right, "\times q^5"'] & v_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_3 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_4 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_5 \end{tikzcd}$$

Exemple : La suite (v_n) définie par $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = -2v_n$ est géométrique.

Proposition 3 : En fait si la suite (v_n) est géométrique de premier terme v_0 et de raison q on a pour tout n : $v_n = v_0 q^n$.

⟶ *démonstration avec le « raisonnement par récurrence ».*

Proposition 4 : Si (v_n) est une suite géométrique de raison q alors :

- si $q > 1$ et $v_0 < 0$: la suite (v_n) est une suite décroissante ;
- si $q > 1$ et $v_0 > 0$: la suite (v_n) est une suite croissante ;

- si $0 < q < 1$ et $v_0 < 0$: la suite (v_n) est une suite croissante ;
- si $0 < q < 1$ et $v_0 > 0$: la suite (v_n) est une suite décroissante ;

- si $q < 0$: la suite (v_n) n'est ni croissante ni décroissante.

⟶ *démonstration*

2) Somme de termes consécutifs

Théorème 2 :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.

On définit S_n par $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On a alors : $$S_n = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

⟶ *démonstration*

Remarque : On peut réécrire cette formule « en français » :

$$S_n = (1^{\text{er}}\text{terme}) \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1-\text{raison}}.$$

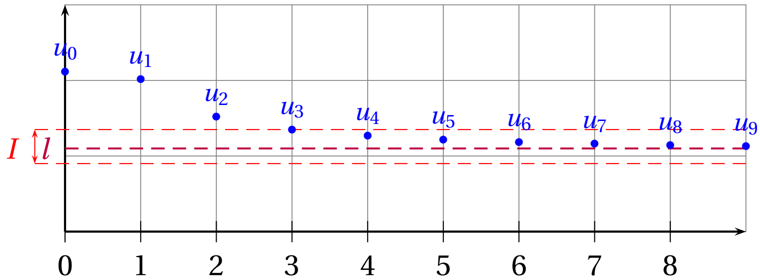
Exemple : On a par exemple : $1 + 2 + \cdots + 2^n = 1 \times \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$.

IV. Limites et convergence des suites

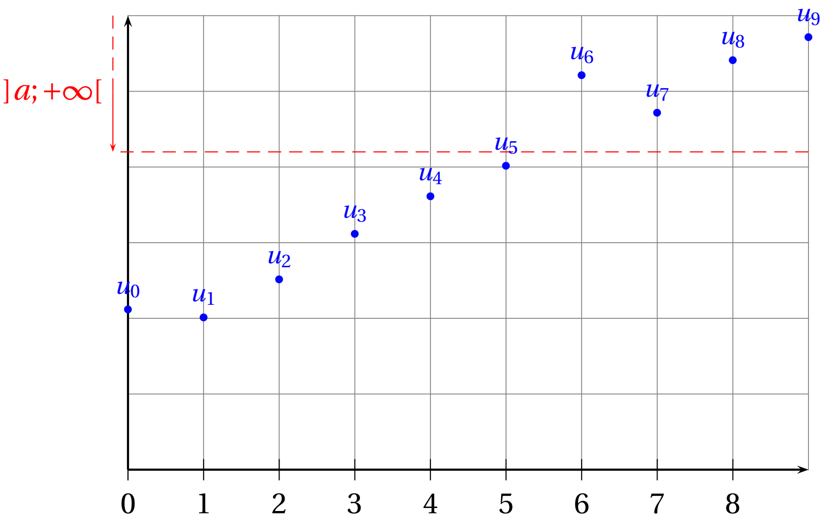
1) Définition

On peut donner pour les suites une définition «rigoureuse» de la notion de limite :

Définition 7 : Soit l un nombre réel et (u_n) une suite.
On dit que l est la *limite* de la suite (u_n) si :
pour tout intervalle ouvert I contenant l, les termes de la suite sont tous dans I à partir d'un certain rang *(une certaine valeur de l'indice)*.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.



Définition 8 : De manière analogue on peut dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si tout intervalle du type $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On définit également et de manière analogue $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.



Définition 9 : On dit qu'une suite (u_n) est *convergente* vers un nombre l si elle admet l comme limite quand n tend vers $+\infty$, on note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
Dans le cas contraire on dit que la suite (u_n) est *divergente*
(si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$ ou si la suite (u_n) n'a pas de limite.)

2) opérations sur les limites

1. Somme

On a le tableau récapitulatif suivant :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

2. Produit

On a le tableau récapitulatif suivant :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

3. Quotient

On a le tableau récapitulatif suivant :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	$+\infty$		$-\infty$		$\pm\infty$	$l<0$ ou $-\infty$		$l>0$ ou $+\infty$		0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) =$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

3) Propriétés

Le théorème suivant est à utiliser après avoir eu le cours sur les limites de fonctions.

Théorème 3 : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[b;+\infty[$ et soit (u_n) définie par $u_n = f(n)$, alors :

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ alors (u_n) converge vers l.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$\longrightarrow$ *démonstration admise*

Exemple : On a par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Proposition 5 : Soit (u_n) une suite croissante :
- si (u_n) est majorée alors la suite est convergente. *(admis)*
- si (u_n) n'est pas majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et la suite est divergente.

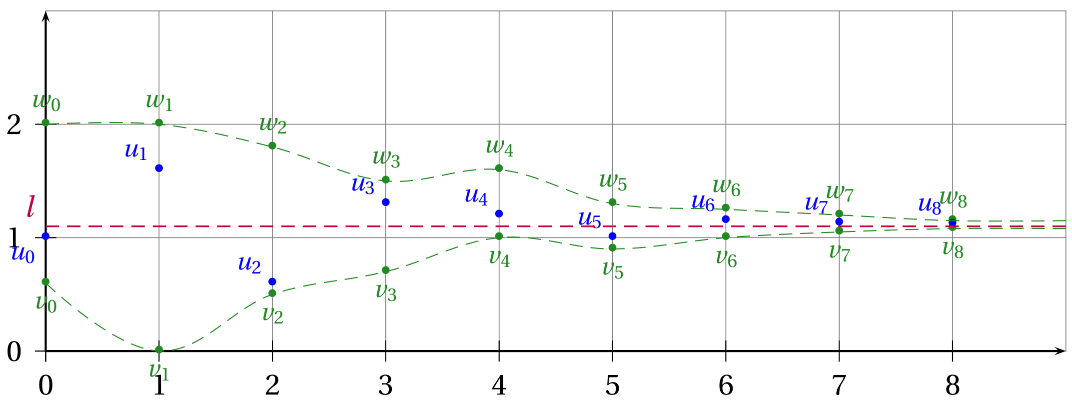
⟶ démonstration

Remarque : On a la propriété équivalente pour les suites décroissantes.

Théorème 4 : Théorème des gendarmes

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) et un nombre l tels que,
à partir d'un certain rang, on ait $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$
avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$.
On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

⟶ démonstration



4) Cas des suites géométriques

Théorème 5 : On considère une suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 non nul *(sinon la suite est toujours nulle)* et de raison q.

- si $q > 1$ et $v_0 > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$;
- si $q > 1$ et $v_0 < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$;
- si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$;
- et si $q = 1$ (v_n) est constante égale à v_0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0$.

⟶ démonstration en exercice.