Chap 3 :

Probabilités

I. Vocabulaire

On parle *d'expérience aléatoire* dès qu'une expérience a plusieurs issues *(résultats)* possibles et que celles-ci ne peuvent être ni prévues ni calculées.
Exemple : Le résultat du lancer d'un dé équilibré.

Définition 1 : On appelle *univers des possibles*, et on note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire $\mathscr{E}$.
Un élément de Ω est appelé *événement élémentaire* .
Un *événement* est un sous-ensemble (ou partie) de Ω *(une ou plusieurs issues)* . L'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω est l'ensemble de tous événements possibles pour l'expérience aléatoire $\mathscr{E}$.

Remarque : Ω est l'événement certain. Il est toujours réalisé.
$\emptyset$ est l'événement impossible. Il n'est jamais réalisé.

Exemple : Avec notre exemple de dé on a $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Définition 2 :

- L'événement « A ou B », noté $A \cup B$ est l'ensemble des événements élémentaires contenus dans A ou dans B.
- L'événement « A et B », noté $A \cap B$ est l'ensemble des événements élémentaires qui sont dans A et B.
- *L'événement contraire* de A, noté $\overline{A}$, est composé des événements élémentaires qui ne sont pas contenus dans A.

Définition 3 : Deux événements A et B sont dits *incompatibles* ou *disjoints* si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Fréquence d'un événement :

Soit A un événement lié à une expérience aléatoire $\mathscr{E}$.
Répétons n fois cette expérience. Soit n_A le nombre de réalisations de A lors de ces n répétitions.
La fréquence d'apparitions de A est : $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$.
L'expérience montre que lorsque n devient de plus en plus grand, $f_n(A)$ tend à se stabiliser autour d'un certain nombre p.
Ce nombre p s'appelle alors *probabilité* de l'événement A et se note $P(A)$.

Propriétés des fréquences (qui conduisent à la définition 4) :

1. $f_n(\Omega) = 1$ car Ω étant toujours réalisé on a $n_\Omega = n$.
2. $f_n(A) \in [0;1]$ car $0 \leqslant n_A \leqslant n$.
3. Si A et B sont incompatibles, $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ car $n_{A\cup B} = n_A + n_B$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

II. Calcul des probabilités

Définition 4 : On appelle *probabilité* toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Pour tout événement A de $\mathscr{P}(\Omega)$, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
3. Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque : Dans la pratique on choisit bien sûr l'application P de manière à représenter au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Exemple : Dans notre exemple on a ainsi $P(«1») = P(«2») = P(«3») = P(«4») = P(«5») = P(«6») = \dfrac{1}{6}$.

Remarque : La représentation des issues d'une expérience aléatoire $\mathscr{E}$ ainsi que des probabilités associées est le plus souvent faite à l'aide d'un tableau à double entrée ou d'un arbre.
(Voir les exos en TD.)

On a les propriétés calculatoires suivantes :

Proposition 1 : Pour tout événement A on a : $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$,
et notamment $P(\emptyset) = 0$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Théorème 1 : Pour tous événements A et B, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Définition 5 : On dit qu'il y a *équiprobabilité* lorsque tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité.

Proposition 2 : S'il y a équiprobabilité : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Exemple : C'est le cas dans notre exemple de lancer de dé.

III. Variables aléatoires

1) Définitions

Il est parfois intéressant d'associer un nombre au résultat d'une expérience aléatoire :

Définition 6 : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, on appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemple : On lance à présent 2 dés cubiques équilibrés. Si le résultat obtenu en faisant la somme des deux dés est compris entre 6 et 9, nous perdons 1€, sinon, nous gagnons 1€. Le gain relatif X lié au double tirage est une variable aléatoire .
X peut prendre les valeurs 1 et -1.

2) Loi de probabilité - Espérance - Variance

Exemple : Perdre 1€, correspond à l'événement $(X = -1)$. Ceci est réalisé lorsque l'événement $\{(1,5), (1,6), (2,5), \ldots, (6,3)\}$ est réalisé.
Donc la probabilité de « $X = -1$ » , notée $P(X = -1)$ est $\dfrac{20}{36}$ et de même $P(X = 1)$ est $\dfrac{16}{36}$.
On vérifie bien que $P(X = -1) + P(X = 1) = 1$.

Définition 7 : Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.
Soit $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X et p_i la probabilité de « $X = x_i$ ».
On a alors : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
On appelle *loi de probabilité* de X la fonction définie sur $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ qui à tout x_i associe le nombre $P(X = x_i)$.
On utilise une représentation à l'aide d'un tableau :

Valeurs de X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Définition 8 :
- On appelle *Espérance mathématique* de X le réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i.$$

- On appelle *Variance* de X le réel positif :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^2\right) - \left(E(X)\right)^2.$$

- On appelle *Ecart-type* de X le réel positif :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque :
- L'espérance représente une moyenne « théorique » de X, c'est la valeur moyenne qu'on peut espérer au bout d'un grand nombre de répétitions de l'expérience $\mathscr{E}$.
- L'écart-type représente la dispersion « théorique » des valeurs possibles autour de $E(X)$. On préfère utiliser $\sigma(X)$ plutôt que $V(X)$ car il est *homogène* avec X.

Exemple : Dans notre exemple précédent on a la loi de probabilité :

Valeurs de X	-1	1
$P(X = x_i)$		

et on a $E(X) =$.........

$V(X) =$.........

puis $\sigma(X) =$ ......