Chap 2 :

Les Polynômes

I. Trinôme du second degré

Définition 1 : Un trinôme du second degré est une expression de la forme ax^2+bx+c, avec $a \neq 0$.

Exemple : x^2, $-2x^2+x-1$, $10000x^2-30000x\dots$

Nous allons déterminer une technique pour résoudre ***toutes*** les équations du type $ax^2+bx+c=0$, avec $a \neq 0$, appelées *équations du second degré*.

1) Forme canonique du trinôme

Proposition - Définition Pour tout trinôme on a : $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$.
Une telle écriture (où les x n'apparaissent qu'une seule fois) s'appelle la *forme canonique* du trinôme.

A quoi ça sert ? : Cette écriture permet dans tous les cas de résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$, il faut la factoriser à l'aide de l'identité remarquable a^2-b^2 puis, si cette factorisation est possible, dire qu'un « produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul » et enfin conclure.

Exemple : la forme canonique de $2x^2-4x-6$ est $2\left((x-1)^2-4\right)$ donc
l'équation $2x^2-4x-6=0$ peut se réécrire

$$2\left((x-1)^2-4\right)=0$$
$$2\left((x-1)^2-2^2\right)=0$$
$$2(x-1-2)(x-1+2)=0$$
$$2(x-3)(x+1)=0.$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc :

soit $x-3=0$ soit $x+1=0$

et les solutions sont donc $x=3$ et $x=-1$.

2) Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$, avec a non nul

Définition 2 : On appelle *racine* (ou *zéro*) du trinôme ax^2+bx+c toute solution de $ax^2+bx+c=0$.

Proposition 1 : α est une racine de ax^2+bx+c si et seulement si on peut factoriser ax^2+bx+c par $(x-\alpha)$ c'est-à-dire si et seulement si $ax^2+bx+c=(x-\alpha)(\dots)$.

Définition 3 : Soit $P(x)=ax^2+bx+c$, on appelle *discriminant* de P, le nombre
$$\Delta=b^2-4ac.$$

Théorème 1 : Soit S l'ensemble des solutions de $ax^2+bx+c=0$.

Si $\Delta<0$: $S=\emptyset$, c'est-à-dire que l'équation n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Si $\Delta=0$: $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

Si $\Delta>0$: $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,;\,\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Exemple : Résoudre les équations suivantes :
- $x^2-3x+2=0$,
- $2x^2+4x+2=0$,
- $-3x^2+2x-2=0$.

Proposition 2 : Si un trinôme a deux racines x_1 et x_2 on peut le factoriser en $a(x-x_1)(x-x_2)$.

3) Signe du trinôme

Dans chacun des trois cas pour Δ on peut déterminer le signe du trinôme en fonction de x.

Théorème 2 : De la forme canonique du trinôme, on déduit :

Si $\Delta<0$: ax^2+bx+c est toujours du signe de a.

Si $\Delta=0$: ax^2+bx+c est toujours du signe de a sauf pour $x=-\dfrac{b}{2a}$ (il est alors nul).

Si $\Delta>0$: ax^2+bx+c est :
- du signe de a à l'extérieur des racines.
- du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

Ce qui donne sous forme de tableau

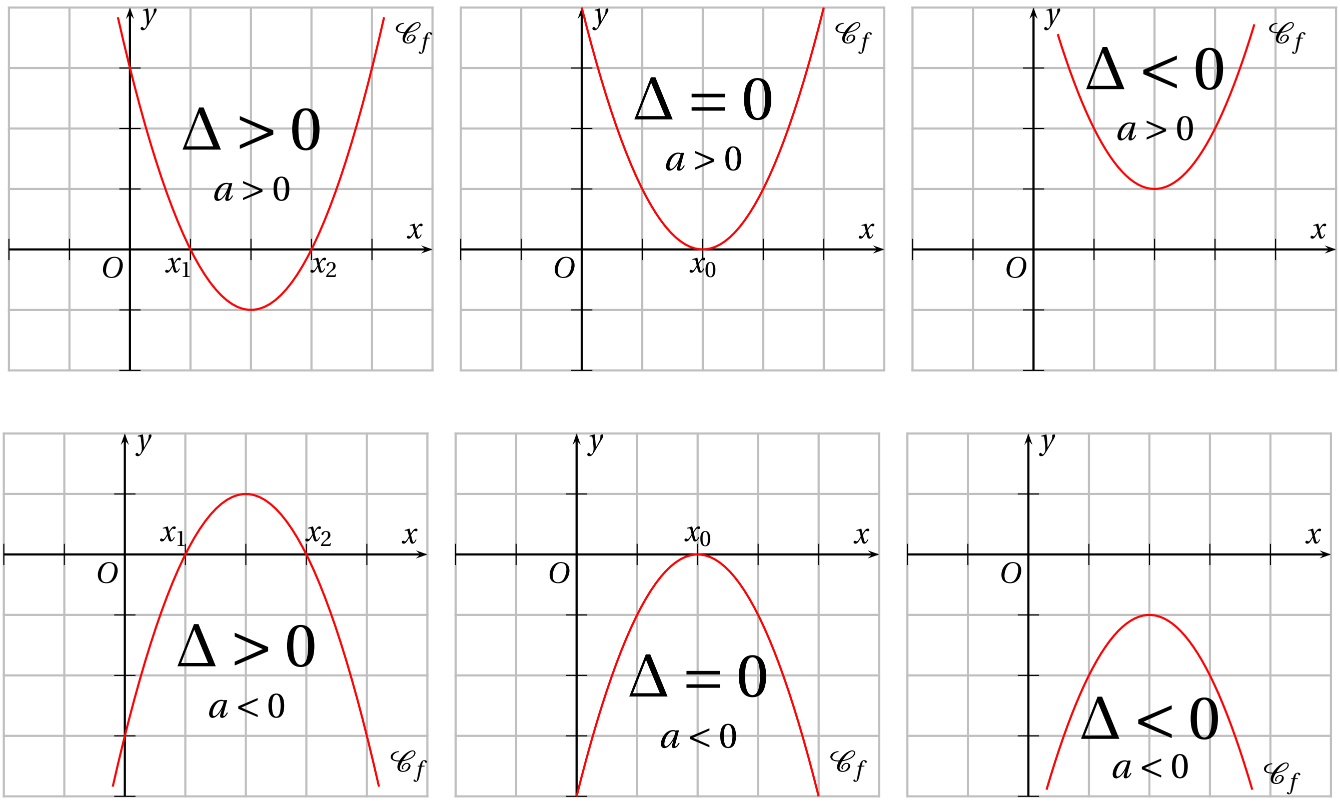
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Remarque : Dans la pratique on peut <u>retrouver</u> ces résultats en factorisant le trinôme.
Par exemple pour le signe de x^2-3x+2 : on connaît ses racines qui sont 1 et 2 donc grâce à la proposition 2 on sait qu'on peut factoriser ce trinôme en $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ puis un tableau de signes nous donne :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-2)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

4) Interprétation géométrique

On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{lcc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2+bx+c \end{array} \right.$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
On peut retrouver les résultats des théorèmes précédents sur $\mathscr{C}_f$:



II. Polynômes

1) Définition

Définition 4 : Un *polynôme* est une fonction de la forme $P : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
où a_0 , a_1 , ..., a_n sont des nombres réels et où n est un entier naturel.

Exemple : $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = -2 + 5x - 3x^5$, $h(x) = 21$...

Vocabulaire : Les nombres réels a_0 , a_1 , ..., a_n s'appellent les *coefficients* du polynôme P.
On lit a « indice » 0, a « indice » 1, ..., a « indice » n.
Le nombre $a_p x^p$ s'appelle le *terme de degré p* du polynôme P.
Le nombre $a_0 x^0 = a_0$ s'appelle le *terme constant* du polynôme P.

2) Egalité de polynômes

Définition 5 : Le *degré* de P est la plus grande puissance de x dans P.

Théorème 3 : On a l'équivalence suivante entre deux polynômes P et Q :

$$P = Q \Longleftrightarrow \begin{cases} \deg P = \deg Q \\ \text{les coefficients de } P \text{ et } Q \text{ sont identiques.} \end{cases}$$

A quoi ça sert ? : Ce théorème est fondamental pour factoriser un polynôme.

Proposition 3 : Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
Plus précisément, pour tout x réel on a :

$$P(x) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \Longleftrightarrow a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ \ldots,\ a_n = 0.$$

3) Factorisation

Définition 6 : Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$.
On appelle *racine* (ou *zéro*) de P tout nombre a tel que $P(a) = 0$.

Théorème 4 : a est racine de $P \iff P(x) = (x-a)(\ldots\ldots)$.
on dit que P est factorisable par $(x-a)$.

Remarque : Pour le degré 2 on retrouve la proposition 1.

On peut en déduire une technique pour *complètement* factoriser un polynôme :

La méthode par *identification des coefficients*

Remarque : c'est la méthode utilisée par la proposition 2.

Exemple : Pour factoriser le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ il faut connaître au moins une racine.
Pour cela on calcule quelques valeurs, par exemple $P(0), P(1)$ et $P(-1)$.
Une fois qu'on a une racine, ici -1, on peut écrire $P(x) = (x+1)(\ldots\ldots)$
et $(\ldots\ldots)$ est forcément un polynôme de degré 2. On peut l'écrire $ax^2 + bx + c$.
En développant $(x+1)(ax^2+bx+c)$ on **doit** retrouver les coefficients de P.

On a $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$ et ainsi
$\begin{cases} 1 = a \\ 1 = a+b \\ -4 = b+c \\ -4 = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ -4 = 0 + c \\ c = -4 \end{cases}$ et donc $a = 1, b = 0$ et $c = -4$ puis

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1)(x^2-4).$$

On refait la même chose pour $x^2 - 4$ en utilisant la proposition 2 : $\Delta = 0 + 4 \times 4 = 16$ et les racines de $x^2 - 4$ sont donc $\dfrac{0-4}{2} = -2$ et $\dfrac{0+4}{2} = 2$, puis $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.
(on aurait pu le voir tout de suite avec l'identité remarquable $a^2 - b^2$.)
On a ainsi la factorisation complète de $P(x)$:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1)(x+2)(x-2).$$