

Chap 1 :

Les Polynômes

I. Trinôme du second degré

Définition 1 : Un trinôme du second degré est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Remarque : Un trinôme du second degré est défini sur \mathbb{R} .

Nous allons déterminer une technique pour résoudre **toutes** les équations du type $ax^2 + bx + c = 0$ appelées *équation du second degré*.

1) Forme canonique du trinôme

On sait résoudre les équations suivantes :

- $x^2 - 3 = 0$
- $(x+2)^2 - 5 = 0$
- $3\left((x+1)^2 - \frac{2}{3}\right) = 0$

En fait on a $3\left((x+1)^2 - \frac{2}{3}\right) = 3x^2 + 6x + 1$ mais les deux formes ne sont pas toutes les deux aussi pratiques pour résoudre $3x^2 + 6x + 1 = 0$ qui est souvent la forme sous laquelle l'équation apparaît.

La forme $3\left((x+1)^2 - \frac{2}{3}\right)$ s'appelle la *forme canonique* du trinôme $3x^2 + 6x + 1$.

L'idée intéressante c'est qu'on peut toujours résoudre une équation du second degré lorsque le trinôme est sous forme canonique et on peut toujours mettre un trinôme sous forme canonique.

Proposition 1 : Pour tout trinôme on a : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.

→ démonstration

2) Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$

Pour résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ c'est donc le signe de $b^2 - 4ac$ qui nous intéresse.

Définition 2 : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, on appelle discriminant de $P(x) = 0$, le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac .$$

On a alors :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \text{ car } a \neq 0.$$

- Si $\Delta < 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc l'équation n'a pas de solutions dans \mathbb{R} .
- Si $\Delta = 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ d'où $x = -\frac{b}{2a}$ est *racine double*.
- Si $\Delta > 0$, alors $\Delta = \sqrt{\Delta^2}$ puis $P(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta^2}}{4a^2} = 0$ qu'on peut factoriser en

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$
, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ sont donc les solutions sur \mathbb{R} de l'équation $P(x) = 0$.

Théorème 1 : Soit S l'ensemble des solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta < 0$, $S = \emptyset$.
- Si $\Delta = 0$, $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.
- Si $\Delta > 0$, $S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

→ démonstration

Remarque : Si a et c sont de signes contraires, on a $\Delta > 0$.

3) Factorisation et racines

Proposition 1 : (HP) Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales dans le cas d'une racine double) alors, $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

→ démonstration

Exemple : On peut le vérifier sur l'exemple $x^2 - 3x + 2 = 0$.

On a également une sorte de réciproque :

Proposition 2 : (HP) Si deux nombres ont pour somme S et pour produit P alors ils sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

→ démonstration

On peut toujours factoriser un trinôme qui a des racines :

Théorème 2 : Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales) alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

→ démonstration

4) Signe du trinôme

Dans chacun des trois cas pour Δ on peut déterminer le signe du trinôme en fonction de x grâce à la forme canonique.

- Si $\Delta < 0$: $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ est du signe de a et donc $ax^2 + bx + c$ aussi.
- Si $\Delta = 0$: $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right]$ est aussi du signe de a sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$ (il est alors nul).
- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ et ainsi pour déterminer son signe il suffit de faire un tableau de signes :

| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ |
|----------------------|--------------|-------|---------------|-----------|
| $(x - x_1)$ | - | 0 | + | + |
| $(x - x_2)$ | - | - | 0 | + |
| $(x - x_1)(x - x_2)$ | + | 0 | - | 0 |
| $ax^2 + bx + c$ | signe de a | 0 | signe de $-a$ | 0 |
| | | | signe de a | |

→ penser à multiplier par a

On peut ainsi résumer la situation avec le théorème suivant :

Théorème 3 : De la forme canonique du trinôme, on déduit :

Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a .

Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$ (il est alors nul).

Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ est :

- du signe de a à l'extérieur des racines.
- du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.

Ce qui donne sous forme de tableau

| | | | | |
|-----------------|--------------|-------|---------------|--------------|
| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ |
| $ax^2 + bx + c$ | signe de a | | signe de $-a$ | signe de a |

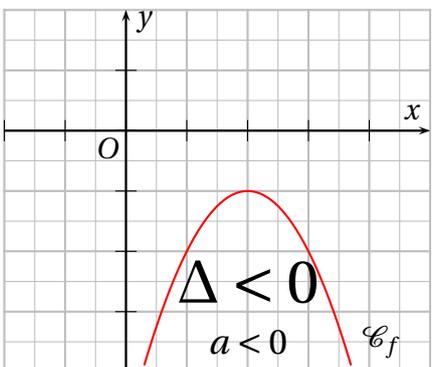
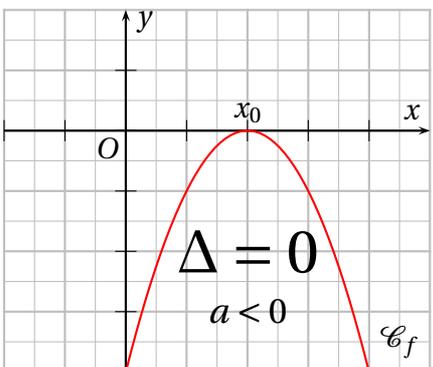
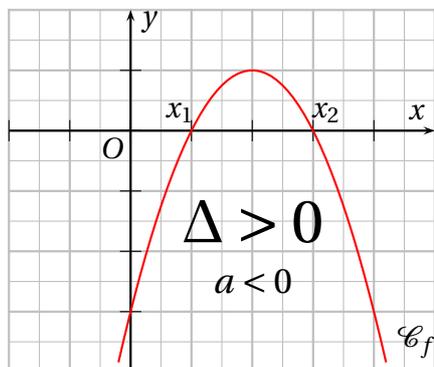
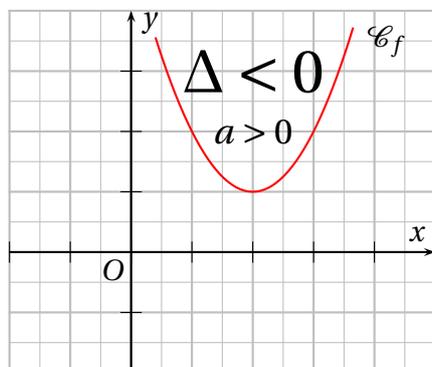
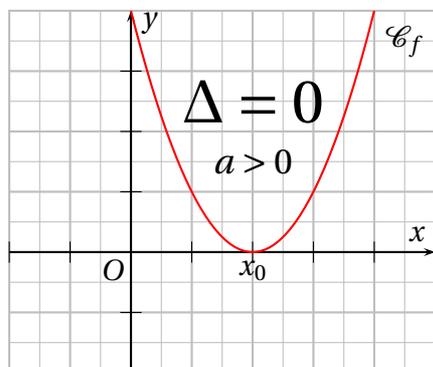
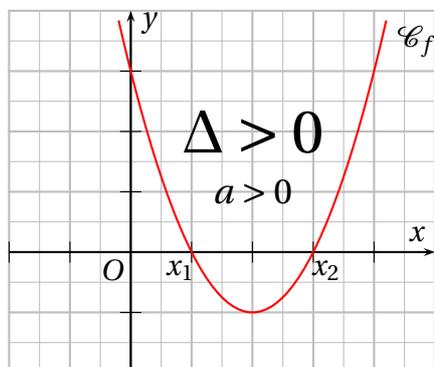
→ démonstration

5) Interprétation géométrique

On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2 + bx + c \end{cases}$.

On appelle \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On peut retrouver les résultats des théorèmes précédents sur \mathcal{C}_f :



II. Polynômes

1) Définition

On commence par définir les *fonctions polynômes* qui sont des outils très utiles en Analyse.

Définition 3 : Une *fonction polynôme* est une fonction $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

où a_0, a_1, \dots, a_n sont des nombres réels et où n est un entier naturel.

Vocabulaire : Les nombres réels a_0, a_1, \dots, a_n s'appellent *coefficients* du polynôme P .

On lit a « indice » n .

Le nombre $a_p x^p$ s'appelle le *terme de degré p* du polynôme P .

Le nombre $a_0 x^0 = a_0$ s'appelle le *terme constant* du polynôme P .

Exemple : $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = -2 + 5x - 3^5$, $h(x) = 21\dots$

2) Degré

Définition 4 : Si $a_n \neq 0$, n est le *degré* de P . On note $n = \deg P$.

Remarque : Un polynôme constant non nul ($\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 \neq 0$) a pour degré 0.

Le polynôme nul n'a pas de degré.

Proposition 2 : Si P et Q sont deux polynômes non nuls, alors $\deg PQ = \deg P + \deg Q$.

→ démonstration

Théorème 4 : On a l'équivalence suivante $P = Q \iff \begin{cases} \deg P = \deg Q \\ \text{les coefficients de } P \text{ et } Q \text{ sont identiques.} \end{cases}$

→ démonstration : faisable avec le cours sur les limites, sinon admise.

Corollaire 1 : Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Plus précisément, pour tout x réel on a :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \iff a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_n = 0.$$

→ démonstration

3) Factorisation

Définition 5 : Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. On appelle *racine* (ou *zéro*) de P tout nombre a tel que $P(a) = 0$.

Définition 6 : On dit qu'un polynôme P est *factorisable* par $(x - a)$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout x réel : $P(x) = (x - a) Q(x)$.

Avec ces définitions on a le théorème **fondamental** suivant :

Théorème 5 : (HP) a est racine de $P \iff P$ est factorisable par $(x - a)$.

→ démonstration : admise car longue et technique.

Remarque :
$$\begin{cases} \deg P = n \\ P(x) = (x - a) Q(x) \end{cases} \Rightarrow \deg Q = n - 1$$

On peut en déduire une technique pour complètement factoriser un polynôme : la technique par *identification des coefficients*.

Exemple : Pour factoriser le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ il faut connaître au moins une racine. Pour cela on calcule quelques valeurs, par exemple $P(0)$, $P(1)$ et $P(-1)$.

Une fois qu'on a une racine (ici -1) on peut écrire $P(x) = (x + 1)Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2. On peut écrire $Q(x) = ax^2 + bx + c$ et en développant $(x + 1)(ax^2 + bx + c)$ on **doit** retrouver P d'où un système à 3 équations et 3 inconnues à résoudre.

→ $P(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$.