

Chap 4 :

Probabilités

I. Vocabulaire et propriétés

1) Rappels

Définition 1 : Dans une *expérience aléatoire*, on appelle *univers* l'ensemble de toutes les *issues* possibles.

On note souvent cet ensemble Ω .

On appelle *événement* toute *partie* de l'univers.

Si cette partie n'a qu'un élément on parle *d'événement élémentaire*.

On appelle *événement contraire* de A la partie de Ω composée de toutes les issues qui ne sont pas dans A .

On le note \bar{A} .

2) Propriétés du calcul des probabilités

La *probabilité* d'un événement A représente les « chances » qu'a l'événement A de se réaliser effectivement. On le note $P(A)$.

Remarque : On a **toujours** $0 \leq P(A) \leq 1$.

On a **toujours** $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.

Il n'y a pas toujours *équiprobabilité*.

Remarque : Il faut distinguer *probabilités* de *fréquences d'apparition*.

Définition 2 : La *probabilité* d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires de A .

Définition 3 : On dit que deux événements A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$.

On a la propriété « naturelle » suivante :

Proposition 1 : Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

On peut en déduire la propriété très utile suivante :

Proposition 2 : On a $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Enfin dans le cas général d'une union de deux événements (*c'est-à-dire pas forcément disjointe*) on a :

Proposition 3 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Et pour l'intersection $A \cap B$ de deux événements ?

il n'y a pas de formule pour ça,

sauf dans un cas particulier : *l'indépendance* des événements.

II. Indépendance

1) Probabilité conditionnelle

Définition 4 : On appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A* le nombre

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Il représente la probabilité de B en supposant que A soit *effectivement* réalisé.

Remarque : On le voit aussi parfois écrit $P(B|A)$.

Proposition 4 : On peut réécrire cette définition : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

Remarque : Cette définition correspond bien à l'idée intuitive que l'on a de « B sachant A ». Prenons un exemple pour illustrer notre propos.

Exemple : On considère le résultat du tirage de deux boules successives dans une urne opaque qui en contient 3 rouges et 2 vertes.

$$\text{On a alors } P(R_1) = \frac{3}{5}, P(R_1 \cap R_2) = \frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{3}{10} \text{ et on a bien } P_{R_1}(R_2) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}.$$

2) indépendance

Définition 5 : On dit que deux événements A et B sont *indépendants* si $P_A(B) = P(B)$.

Remarque : on peut réécrire cette définition : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Il y a deux façons d'avoir des événements indépendants :

- soit le "bon sens" vous suggère que les événements le sont,
- soit l'énoncé vous le dit d'une manière ou d'une autre.

Les cas d'indépendance sont dans la pratique très courants.

Dès qu'on répète plusieurs fois une même expérience aléatoire, par exemple, les résultats de ces expériences sont indépendants les uns des autres.

Exemple : Reprenons notre exemple du tirage mais en supposant qu'une fois la première boule tirée on la remette dans l'urne avant de tirer la seconde.

$$\text{On a alors } P(R_1 \cap R_2) = \frac{3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{9}{25}, P(R_1) = \frac{3}{5} \text{ et on a bien } P_{R_1}(R_2) = \frac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}.$$

On a donc bien indépendance du premier et du deuxième tirage.