Chap 1 :

Taux d'évolution

I. Exposants réels

Dans tout le chapitre nous aurons besoin de nombres élevés à une puissance quelconque, pas seulement entière comme nous faisions précédemment.
Autrement dit on va utiliser des nombres de la forme : $3^{0,2}$, $3^{0,33333}$, $5^{2,4}$, $1,61^{3,4}$ ....

Comment calculer de tels nombres ? A la calculatrice.

Cela signifie aussi qu'on ne vous demandera pas de valeurs exactes dans les exercices (ça, la calculatrice ne sait pas le faire) mais que des valeurs approchées.

Proposition 1 : la puissance $0,5$
Pour tout nombre x positif on a $x^{0,5} = \sqrt{x}$.

Proposition 2 : Pour tout nombre entier n l'équation $x^n = 3,2$ admet une seule solution $x = 3,2^{\frac{1}{n}}$.

II. Taux et indices

1) Taux d'évolution

Remarque : On rappelle qu'un pourcentage est une fraction de la forme $\dfrac{\cdot}{100}$, un taux de 4% et un taux de $0,04$ représente donc la même chose.

Définition 1 : On appelle *taux d'évolution* de A par rapport à B le nombre t tel que $(1+t)\times A = B$.
On a alors $t = \dfrac{B-A}{A}$.

$$A \xrightarrow{\times(1+t)} B$$

Remarque : Un taux d'évolution positif correspond à une hausse et un taux d'évolution négatif correspond à une baisse.

2) Taux d'évolution réciproque

Définition 2 : On appelle *taux d'évolution réciproque* de A par rapport à B le taux d'évolution t' de B par rapport à A.
On a donc $(1+t')\times B = A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "\times(1+t)"] & B \arrow[l, bend left, "\times(1+t')"] \end{tikzcd}$$

Attention : On a *toujours* t' différent $-t$ même si souvent la différence n'est pas très grande (voir le paragraphe sur les approximations).

Exemple : Prenons $A = 50$ et $B = 55$ alors le taux d'évolution entre A et B est
$t = \dfrac{B}{A} - 1 = 0,1 = 10\%$.
Le taux d'évolution réciproque est $t = \dfrac{A}{B} - 1 = -\dfrac{1}{11} \approx -9,1\%$, et ce n'est pas -10%.

3) Indice

Définition 3 : On appelle *indice* de B par rapport à A le nombre $I = 100 \times \dfrac{B}{A}$.
Si t est le taux d'évolution de B par rapport à A alors $100(1+t) = I$.

Exemple : Un indice de 112 correspond à une augmentation de 12%.

On peut comparer l'indice avec 100 pour en déduire l'évolution entre A et B.

Proposition 3 :
- Un indice est toujours strictement positif.
- Un indice plus grand que 100 correspond à une hausse : $B > A$.
- Un indice plus petit que 100 correspond à une baisse : $B < A$.

A quoi ca sert ? L'intérêt des indices et de tout ramener à 100 afin de mieux « voir » et comparer les évolutions.

III. Taux d'évolution moyen

On étudie une quantité A qui subit, par exemple, 4 évolutions successives de taux 5%, 10%, 7% et 12%.
Cette quantité est donc devenue après ces 4 évolutions
$B = (1+0,12)\times(1+0,07)\times(1+0,1)\times(1+0,05)\times A \approx 1,384\times A$, ce qui correspond au *taux d'évolution global* de 38,4%.
On appelle *taux d'évolution moyen* le taux t qui correspond à la «moyenne» des 4 taux c'est-à-dire le taux d'évolution qui, appliqué 4 fois à A, nous donnerait encore B :
$B = (1+t)\times(1+t)\times(1+t)\times(1+t)\times A = (1+t)^4\times A$.
On peut alors calculer t : $1+t = \Big((1+0,12)\times(1+0,07)\times(1+0,1)\times(1+0,05)\Big)^{\frac{1}{4}} \approx 1,084$ et ainsi $t \approx 8,4\%$.

Définition 4 : On appelle *taux d'évolution moyen* t_m des 5 évolutions successives de taux positifs t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5 le taux qui appliqué 5 fois de suite donnerait le même résultat que les 5 taux t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "\times(1+t_1)"] \arrow[rrrrr, bend right, "\times(1+t_m)^5"'] & A_1 \arrow[r, bend left, "\times(1+t_2)"] & A_2 \arrow[r, bend left, "\times(1+t_3)"] & A_3 \arrow[r, bend left, "\times(1+t_4)"] & A_4 \arrow[r, bend left, "\times(1+t_5)"] & A_5 = B
\end{tikzcd}$$

Attention : Le taux t_m ne correspond pas à la moyenne $\dfrac{t_1+t_2+t_3+t_4+t_5}{5}$.

Exemple : Un taux d'intérêt annuel de 10% correspond à un taux d'intérêt mensuel t tel que $(1+t)^{12} = 1+0,1$ c'est-à-dire $t \approx 0,79\%$ qui n'est pas égal à $\dfrac{10}{12}\%$.

A quoi ca sert ? On s'en sert souvent pour faire le lien entre un taux annuel et un taux mensuel par exemple.

IV. Approximation d'un taux d'évolution

1) Pour deux évolutions successives de même taux

On considère deux évolutions successives de taux 1%,
ainsi A deviendra-t-il $(1+0.01)^2\times A = 1,0201\times A$, que l'on peut arrondir à $1,02\times A$.
Ces deux évolutions correspondent donc à une évolution globale de taux environ $2\times1\%$.

Proposition 4 : Lorsque t est petit, le taux d'évolution global de deux évolutions successives de taux t est environ égal à $2t$.

2) Pour une évolution réciproque

Comme on l'a vu au chapitre I. le taux d'une évolution réciproque d'une évolution de taux t n'est pas $-t$ mais pourtant, *si t est petit* et uniquement dans ce cas là, on peut approximer le taux d'évolution réciproque par $-t$:
On considère une évolution entre A et B de taux 2% alors on a $(1+0,02)\times A = B$ et donc $A = \dfrac{1}{1+0,02}\times B \approx 0,98\times B = (1-0,02)\times B$.
Le taux d'évolution réciproque de A par rapport à B est donc environ -2%.

Proposition 5 : Lorsque t est petit, le taux d'évolution réciproque d'une évolution de taux t est environ égal à $-t$.