Corrigé Devoir Maison 2

Exercice 1 : *Coût marginal*

1) *a)* Le coût total de fabrication de 1000 objets est par définition $C(1000)$ c'est-à-dire , après calcul, 92000 euros. Celui de 1001 objets est $C(1001)$ c'est-à-dire , après calcul, 92079,99 euros.

   b) L'augmentation du coût entraînée par la fabrication d'un objet supplémentaire après en avoir fabriqué 1000 est donc $C(1001) - C(1000)$ c'est-à-dire 79,99 euros.

2) *a)* On a le coût de fabrication $C(x+1)$ qui vaut $2000 + 100(x+1) - 0,01(x+1)^2$ c'est-à-dire $2000 + 100x + 100 - 0,01(x^2 + 2x + 1) = 2100 + (100 - 0,02)x - 0,01x^2 - 0,01 = 2099,99 + 99,98x - 0,01x^2$.

   b) On a $C(x+1) - C(x) = 2099,99 + 99,98x - 0,01x^2 - (2000 + 100x - 0,01x^2) = 99,99 - 0,02x$.

3) On calcule $C'(x)$: $C'(x) = 100 - 0,01 \times 2x = 100 - 0,02x$ pour tout x de $[0\,;+\infty[$.

4) *a)* En considérant que $C'(x)$ est à peu près égal à $C(x+1) - C(x)$ on commet l'erreur $C'(x) - \big(C(x+1) - C(x)\big)$ c'est-à-dire $100 - 0,02x - (99,99 - 0,02x) = 0,01$.
   On commet donc une erreur de 1 centimes d'euro en arrondissant le coût marginal par $C'(x)$.

   b) On calcule $C'(1000)$: $C'(1000) = 100 - 0,02 \times 1000 = 80$ et à la question 1)*b)* on avait trouvé $79,99$. Il y a donc bien une erreur de 1 centimes d'euro en approximant le coût marginal par $C'(x)$.

Exercice 2 : *Etude de fonction*

1) *a)* On a pour tout x de $[0\,;2]$ $f'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 - 1 = x^2 - 1$.

   b) Pour tout x on a $(x+1)(x-1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1 = f'(x)$ ce qui est la forme demandée.

   c) Le signe de $f'(x)$ est donnée par le produit des signes de $(x+1)$ et de $(x-1)$. On met ces résultats dans un tableau de signes :

x	0		1		2
$(x-1)$		-	0	+	
$(x+1)$		+		+	
$(x-1)(x+1)$		-	0	+	

   d) A partir du signe de $f'(x)$ on peut établir le tableau de variations de f :

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

On compléte le tableau à l'aide des images de 0; 1 et 2.
On a $f(0)=\dfrac{1}{3}$; $f(1)=\dfrac{1}{3}-1+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$ et $f(2)=\dfrac{1}{3}\times 8-2+\dfrac{1}{3}=1$.

2) Dans l'intervalle $[1\,;2]$ la fonction f est strictement croissante et d'après les calculs de la question précédente $f(1)<0$ et $f(2)>0$ donc, par conséquent, il existe une seule solution à l'équation $f(x)=0$ sur $[1\,;2]$ qu'on note α.
A l'aide de la calculatrice on calcule une valeur approchée de α : 1,53.

3) On construit la courbe $\mathcal{C}_f$ et on place le point A.