Chap 10:

Systèmes linéaires

Dans ce chapitre on cherche à résoudre des *systèmes linéaires* c'est-à-dire des systèmes du type

$$\begin{cases} ax+by &= c \\ a'x+b'y &= c'. \end{cases}$$

Résoudre ce système c'est :
*Trouver les x et y qui vérifient **en même temps** la première et la deuxième équation.*

Exemple : On illustre tout ce cours par la résolution progressive de trois systèmes :

$$\begin{cases} 12x+16y &= 8 \\ 15x+20y &= 5. \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} 7x-3y &= 5 \\ 28x-12y &= 20. \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} x+3y &= 17 \\ 5x+2y &= 20. \end{cases}$$

I. Interprétation géométrique

On peut voir chacune des lignes du système comme une équation de droite.
(appelées équations cartésiennes)

Exemple : Par exemple on a $7x-3y=5 \Longleftrightarrow -3y=-7x+5 \Longleftrightarrow 3y=7x-5 \Longleftrightarrow y=\frac{7}{3}x-\frac{5}{3}$.

On peut alors voir la résolution du système comme la recherche des coordonnées des *(éventuels)* points d'intersection des deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ dont on a les équations.

$$\begin{cases} ax+by &= c & (\mathscr{D}) \\ a'x+b'y &= c'. & (\mathscr{D}') \end{cases}$$

1) Nombre de solutions

Il y a trois cas possibles pour le nombre de points d'intersection de deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$:

Proposition 1 :

- Si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont confondues alors tous les points de la droite sont points d'intersection entre $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.
- Si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles et disjointes alors il n'y a pas de point d'intersection entre $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.
- Si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes alors il y a un seul point d'intersection entre $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

Définition 1 : On appelle *discriminant* du système $\left\{\begin{array}{rcl} a\,x+b\,y & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$ le nombre $ab'-a'b$.

Proposition 2 : Pour connaître le nombre de solutions du système $\left\{\begin{array}{rcl} a\,x+b\,y & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$,
on calcule le *discriminant* $ab'-a'b$:

- Si $ab'-a'b=0$:
  alors les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles (confondues ou disjointes).
  Le système admet alors soit aucune solution soit une infinité de solutions.
- Si $ab'-a'b\neq 0$:
  alors les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes.
  Le système admet une et une seule solution.

Exemple : On reprend nos trois systèmes exemples.

Pour $\left\{\begin{array}{rcl} 12x+16y & = & 8 \\ 15x+20y & = & 5, \end{array}\right.$ le discriminant vaut $12\times 20-15\times 16=240-240=0$. Il nous faut donc déterminer si les deux équations représentent la même droite ou non.	Pour $\left\{\begin{array}{rcl} 7x-3y & = & 5 \\ 28x-12y & = & 20, \end{array}\right.$ le discriminant vaut $7\times(-12)-28\times(-3)=-84++84=0$. Il nous faut donc déterminer si les deux équations représentent la même droite ou non.	Pour $\left\{\begin{array}{rcl} x+3y & = & 17 \\ 5x+2y & = & 20, \end{array}\right.$ le discriminant vaut $1\times 2-5\times 3=-13\neq 0$. Le système a donc un et un seul couple solution.

II. Solutions

Pour résoudre un système il faut ***AVANT TOUT*** déterminer le nombre de solutions du système.
On calcule donc le discriminant $ab'-a'b$.

1) $ab'-a'b=0$

Les deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles et il nous faut déterminer si elles sont confondues ou disjointes.
Pour cela on compare chacune des équations. On réécrit l'une des deux équations pour avoir les mêmes coefficients devant x et y que dans la deuxième. Il nous reste alors à comparer les deuxièmes membres pour déterminer dans quel cas on se trouve.

Exemple : On poursuit la résolution de nos systèmes. Après calculs seuls les deux premiers ont un dicriminant nul. On ne s'occupe ici que de ceux-là.

On a $\begin{cases} 12x+16y = 8 & (\mathscr{D}) \\ 15x+20y = 5, & (\mathscr{D}') \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \frac{15}{12}\times 12x+\frac{15}{12}\times 16y = \frac{15}{12}\times 8 & (\mathscr{D}) \\ 15x+20y = 5, & (\mathscr{D}') \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 15x+20y = 10 & (\mathscr{D}) \\ 15x+20y = 5. & (\mathscr{D}') \end{cases}$$

Les deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles et disjointes .

Le système n'a donc pas de solution.

On a $\begin{cases} 7x-3y = 5 & (\mathscr{D}) \\ 28x-12y = 20, & (\mathscr{D}') \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} 4\times 5x-4\times 3y = 4\times 5 & (\mathscr{D}) \\ 28x-12y = 20, & (\mathscr{D}') \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 28x-12y = 20 & (\mathscr{D}) \\ 28x-12y = 20. & (\mathscr{D}') \end{cases}$$

Les deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont confondues, d'équation $7x-3y=5$ ou encore $y=\frac{7}{3}x-\frac{5}{3}$.

Le système a donc pour solution tous les couples $\left(x;\frac{7}{3}x-\frac{5}{3}\right)$ où x décrit l'ensemble des réels.

2) $ab'-a'b\neq 0$

Les deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes et le système admet un seul couple de solution $(x;y)$.

Exemple : On poursuit la résolution de nos systèmes. Seul le dernier système a un dicriminant non nul.

On veut donc résoudre le système $\begin{cases} x+3y = 17 \\ 5x+2y = 20. \end{cases}$

Il existe alors deux techniques pour les calculs :

Par *substitution* :

On écrit par exemple x en fonction de y dans (1) :

$$\begin{cases} x+3y = 17 & (1) \\ 5x+2y = 20 & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 17-3y & (1) \\ 5x+2y = 20. & (2) \end{cases}$$

On remplace le x de (2) par l'expression de (1) :

$$\iff \begin{cases} x = 17-3y & (1) \\ 5\times(17-3y)+2y = 20. & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 17-3y & (1) \\ 85-15y+2y = 20. & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 17-3y & (1) \\ -13y = 20-85. & (2) \end{cases}$$

On résout (2) et on remplace alors y dans (1) par sa valeur trouvée :

$$\iff \begin{cases} x = 17-3y & (1) \\ y = \frac{-65}{-13}=5. & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 17-3\times 5=2 & (1) \\ y = 5. & (2) \end{cases}$$

Le système a un seul couple solution : $(2;5)$.

Par *combinaison* :

On multiplie par exemple (1) par 5 pour avoir les mêmes coefficients devant x dans chacune :

$$\begin{cases} x + 3y = 17 & (1) \\ 5x + 2y = 20. & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x + 15y = 85 & (1) \\ 5x + 2y = 20. & (2) \end{cases}$$

On remplace (1) par $(1)-(2)$ et on laisse (2) :

$$\iff \begin{cases} 5x-5x + 15y-2y = 85-20 & (1) \\ 5x + 2y = 20. & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 13y = 65 & (1) \\ 5x+2y = 20. & (2) \end{cases}$$

On résout alors (1) et on remplace alors x dans (2) par sa valeur trouvée :

$$\iff \begin{cases} y = \frac{65}{13}=5 & (1) \\ 5x+2\times 5 = 20. & (2) \end{cases}$$

On résout alors (2) :

$$\iff \begin{cases} y = 5 & (1) \\ 5x = 20-10=10. & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 5 & (1) \\ x = \frac{10}{5}=2. & (2) \end{cases}$$

Le système a un seul couple solution : $(2;5)$.