Chap 7:

Inéquations et signes

I. Inéquations du premier degré

Définition 1 : On dit que deux équations ou deux inéquations sont *équivalentes* si on peut passer de l'une à l'autre par utilisation de l'une des quatre règles ci-dessous.

Voici ces quatre règles pour passer d'une inéquation à une inéquation équivalente :

Règle 1 : Ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres de l'inéquation.

Exemple : $2x+3<2$ est équivalente à $2x+3-3<2-3$ c'est-à-dire $2x<-1$.

Règle 2 : Multiplier ou diviser par un même nombre positif les deux membres de l'inéquation.

Exemple : $2x \leqslant -1$ est équivalente à $\dfrac{2x}{2} \leqslant \dfrac{-1}{2}$ c'est-à-dire $x \leqslant \dfrac{-1}{2}$.

Règle 3 : Multiplier ou diviser par un même nombre négatif les deux membres de l'inéquation en changeant le sens de l'inégalité.

Exemple : $-3x \geqslant 2$ est équivalente à $\dfrac{-3x}{-3} \leqslant \dfrac{2}{-3}$ c'est-à-dire $x \leqslant -\dfrac{2}{3}$.

Règle 4 : Simplifier les écritures (mettre au même dénominateur ...).

Exemple : $x+\dfrac{1}{2}x>3$ est équivalente à $\dfrac{2}{2}x+\dfrac{1}{2}x>3$ c'est-à-dire $\dfrac{3}{2}x>3$.

Remarque : On donne toujours les ensembles solution sous formes d'intervalles.

Rem : Parler de valeurs absolues.

II. Signe de $ax+b$

1) Résolution

Chercher le signe de $ax+b$ revient à résoudre $ax+b>0$.

Exemple : Chercher le signe de $2x+5$ revient à résoudre $2x+5>0$:

$2x>-5$ et donc $x>-\dfrac{5}{2}$.

$2x+5$ est ainsi positif dès que $x>-\dfrac{5}{2}$.

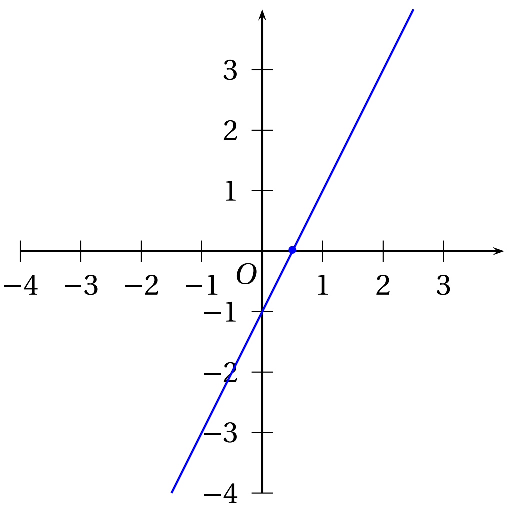
On peut alors mettre les résultats dans un tableau de signes.
Dans notre exemple précédent cela donnerait :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x+5$		-	0	+	

2) Représentation graphique

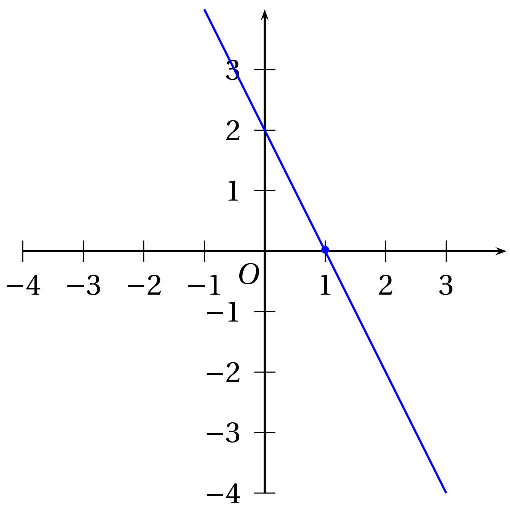
Si on trace la droite d'équation $y = ax + b$ on peut alors lire sur le graphique le signe de $ax + b$.

Pour $y = 2x - 1$:



x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		-	0	+	

Pour $y = -2x + 2$:



x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x+2$		+	0	-	

III. Inéquations produit et quotient

1) Inéquations de degré 2, inéquations produit

Une inéquation de degré deux est une inéquation qui, si elle est développée, contient des « x^2» .

Exemple : $2x^2 + 1 \leqslant 3$.

• Le principe de résolution est d'obtenir une inéquation équivalente avec un des deux membres nul,

Exemple : *Avec notre exemple :* $2x^2 + 1 - 3 \leqslant 0$ *c'est-à-dire* $2x^2 - 2 \leqslant 0$.

• puis de factoriser au maximum l'expression,

Exemple : *Avec notre exemple cela donne :*
$2x^2 - 2 \leqslant 0 \iff 2(x^2 - 1) \leqslant 0 \iff 2(x-1)(x+1) \leqslant 0 \iff (x-1)(x+1) \leqslant 0$.

Remarque : Cette dernière inéquation s'appelle une *inéquation produit* .

• de chercher le signe de chacun des facteurs,

Exemple : $\begin{array}{l|l} x-1>0 & x+1>0 \\ x>1 & x>-1. \end{array}$

On a ainsi déterminé le signe de chacun des facteurs en fonction de x .
• on met enfin les résultats dans un tableau de signes et on y *lit* l'ensemble solution.

Exemple :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x+1)$		-	0	+	|	+	
$(x-1)$		-	|	-	0	+	
$2(x+1)(x-1)$		+	0	-	0	+	

L'ensemble des solutions est donc $[-1;1]$.

2) Inéquations quotient

Une inéquation quotient est une inéquation avec des «x» au dénominateur.

Le principe de résolution reste globalement le même que pour une inéquation produit :

Exemple : $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$. *Il **FAUT** que* x *soit non nul.*

• On cherche une inéquation équivalente avec un des deux membres nul,

***Exemple :** Avec notre exemple cela donne* $\dfrac{1}{x} \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x} \leqslant 0$.

• on détermine le signe du numérateur et du dénominateur,

Exemple : $\begin{array}{l|l} 1-x>0 & x>0 \\ 1>x & \end{array}$.
On a ainsi déterminé le signe de chacun des facteurs en fonction de x .

• on met enfin les résultats dans un tableau de signes et on y *lit* l'ensemble solution.

Exemple :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		-	0	+	|	+	
$1-x$		+	|	+	0	-	
$\frac{1-x}{x}$		-	||	+	0	-	

L'ensemble solution est ainsi $]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$.

Remarque : Les doubles barres représentent les *valeurs interdites* pour l'inéquation.