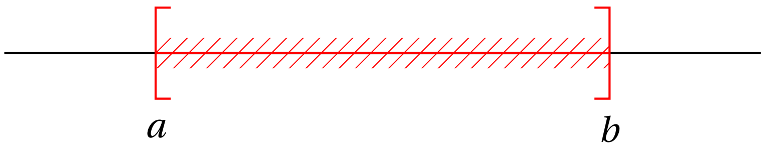
Chap 3: **Les Fonctions**

I. Définition de fonction

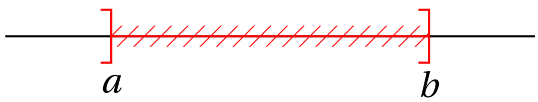
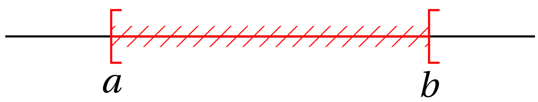
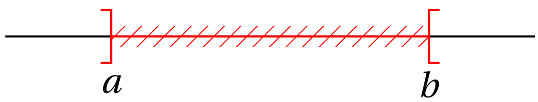
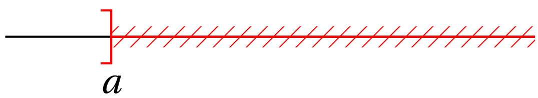
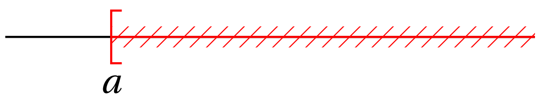
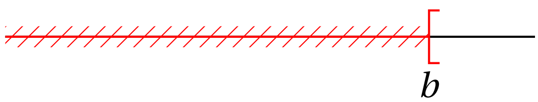
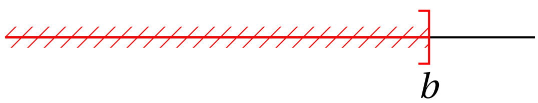
1) Notions d'intervalles

Définition 1 : Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
L'ensemble des nombres réels compris entre a et b (au sens large) est appelé *intervalle* fermé de bornes a et b. Il se note $[a;b]$.



$[a;b]$

On peut faire la liste de tous les intervalles possibles ainsi que les inégalités qui leur correspondent :

	$]a;b]$	$a < x \leqslant b$
	$[a;b[$	$a \leqslant x < b$
	$]a;b[$	$a < x < b$
	$]a;+\infty[$	$a < x$
	$[a;+\infty[$	$a \leqslant x$
	$]-\infty;b[$	$x < b$
	$]-\infty;b]$	$x \leqslant b$

Remarque : On a $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$ et on note $\{a\} = [a;a]$.

On parlera de « réunion et d'intersection » d'intervalles en TD.

2) Définition

Définition 2 : Soit $\mathscr{D}_f$ un intervalle ou une union d'intervalles.
On définit une fonction f de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbb{R}$ en associant à chaque x de $\mathscr{D}_f$ un *unique* réel noté $f(x)$.
$\mathscr{D}_f$ est appelé *l'ensemble de définition* de f.
$f(x)$ est appelée *l'image de x par f* .

On la note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.

3) Ensemble de définition

Il faut que pour tout x de $\mathscr{D}_f$ $f(x)$ « existe ».
Par exemple $\sqrt{x}$ ne peut pas être défini pour x négatif.
Il arrive que l'ensemble de définition ne soit pas précisé, on convient alors que $\mathscr{D}_f$ est le plus grand possible.

Exemple : Si on a « juste » $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cela sous-entend que $\mathscr{D}_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

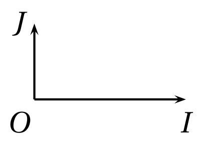
Exercice 1 : Trouver les ensembles de définition maximaux de :

- $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\longrightarrow D_g =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$
- $h(x) = \sqrt{x+1}$ $\longrightarrow D_h =]-1; +\infty[$

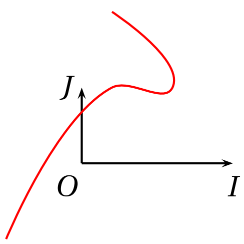
II. Représentation graphique

1) Définition

Dans toute la suite on utilisera un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ dans lequel $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.



Définition 3 : Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.
On appelle *courbe représentative* de f dans le repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $\left(x; f(x)\right)$ pour tout x de $\mathscr{D}_f$.

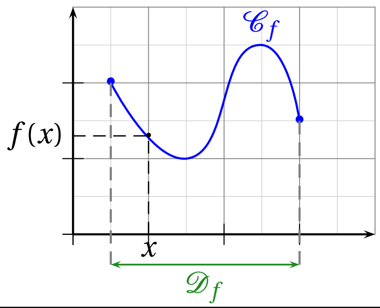
Remarque : Attention 

n'est pas la courbe représentative d'une fonction.

2) Equation d'une courbe

Définition 4 : On dit que la courbe représentative de f, souvent notée $\mathscr{C}_f$, dans le repère $\left(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ a pour *équation* $y = f(x)$.
$\longrightarrow$ A expliquer sur l'exemple de l'activité.

Remarque : Quand on a la courbe représentative d'une fonction f, l'ensemble de définition de f est l'ensemble des abscisses des points de la courbe.



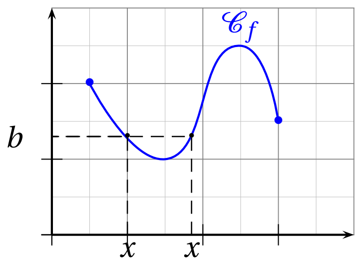
III. Image et antécédents

1) Définition

Définition 5 : Comme on l'a vu dans la partie II. l'image (unique !) d'un x de $\mathscr{D}_f$ est $f(x)$.

On considère un réel b quelconque.

Définition 6 : Les *antécédents* de b par f sont <u>*tous*</u> les nombres x de $\mathscr{D}_f$ tels que $f(x) = b$.
Il peut y en avoir plusieurs ou aucun.



Exemple : Dans notre activité les antécédents de :

- 15 sont $\longrightarrow$ *3 et 5*
- 16 sont $\longrightarrow$ *4*
- 17 sont $\longrightarrow$ *il n'y en a pas*

2) Lecture graphique

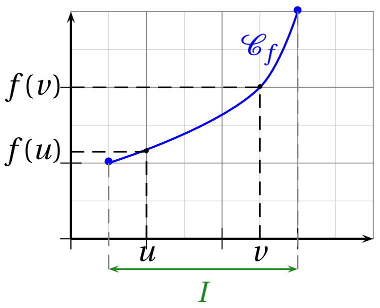
On peut déterminer sur la courbe représentative d'une fonction les images et les antécédents.
On parle de *détermination graphique*.

Exemple : Prenons $f : \begin{cases} [-3;3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$ et cherchons graphiquement les images de 3 et 1, les antécédents de 4.

IV. Variations des fonctions

1) Croissance

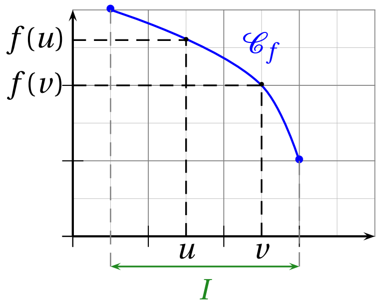
Définition 7 : Soit f une fonction et I un intervalle inclu dans son ensemble de définition.
On dit que f est strictement *croissante* sur I si on a :
pour tout $u < v$ de I : $f(u) < f(v)$.



Remarque : f est « seulement » croissante si elle fait un plat.

2) Décroissance

Définition 8 : Soit f une fonction et I un intervalle inclu dans son ensemble de définition.
On dit que f est strictement *décroissante* sur I si on a :
pour tout $u < v$ de I : $f(u) > f(v)$.



Remarque : f est « seulement » décroissante si elle fait un plat.

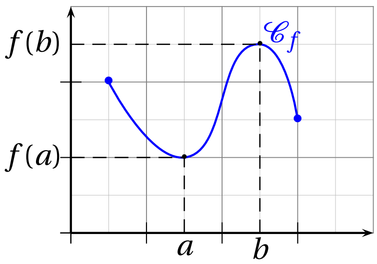
Remarque : **Attention** le contraire de croissante n'est pas décroissante.

3) Extremum

Définition 9 : Soit f une fonction et I un intervalle inclu dans son ensemble de définition. Soit a et b appartenant à I.

- $f(a)$ est le *minimum* de f sur I si $f(a)$ est la plus petite valeur des $f(x)$ pour x dans I.
  C'est-à-dire : pour tout x de I $\quad f(x) \geqslant f(a)$.
- $f(b)$ est le *maximum* de f sur I si $f(b)$ est la plus grande valeur des $f(x)$ pour x dans I.
  C'est-à-dire : pour tout x de I $\quad f(x) \leqslant f(b)$.

Dans les deux cas on parle *d'extremum* (au pluriel extrema) de la fonction f sur I.



Remarque : il faut distinguer un extremum $f(a)$ de la valeur où est prise cet extremum a.

4) Tableau de variations

On peut résumer toutes les informations que l'on a sur une fonction f dans *le tableau de variations* .
On y trouve l'ensemble de définition, les intervalles de croissance et de décroissance et les extrema.

Voici celui de la fonction g de l'activité.

x	0		4		8
			16		
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0