

Chap 10 :

Transformations du plan et de l'espace

Les définitions et propriétés sont **valides** aussi bien dans le plan que dans l'espace.

I. Définitions

Définition 1 : On appelle *transformation* du plan (ou de l'espace) toute fonction bijective du plan (ou de l'espace), c'est-à-dire que **tout** point du plan (ou de l'espace) possède **un et un seul** antécédent par cette fonction.

Remarque : Une projection sur une droite du plan n'est pas une transformation du plan.

Définition 2 : Si f est une transformation du plan (ou de l'espace), la *transformation réciproque* de f est la transformation notée f^{-1} qui, à tout point du plan (ou de l'espace), associe son unique antécédent par f .

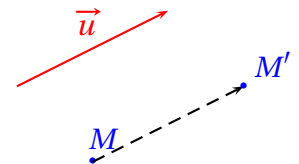
$$M' = f(M) \iff M = f^{-1}(M').$$

Voici les caractéristiques de quelques transformations du plan et de l'espace :

1) Translations

Définition 3 : Soit \vec{u} un vecteur du plan. La *translation de vecteur \vec{u}* est la transformation du plan (ou de l'espace) notée $t_{\vec{u}}$ définie par :

$$M' = t_{\vec{u}}(M) \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$



Remarque : La translation de vecteur nul $t_{\vec{0}}$ est l'application identité $Id : M \mapsto M$.

Proposition 1 : Si $M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $N' = t_{\vec{u}}(N)$ alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

→ démonstration

Théorème 1 : La transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$.

→ démonstration

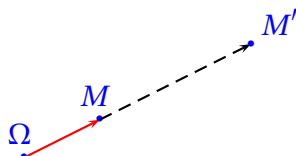
2) Homothétie

Définition 4 : Soit Ω un point du plan et soit $k \in \mathbb{R}^*$.

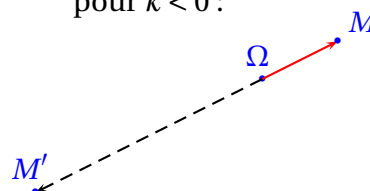
L'*homothétie de centre Ω et de rapport k* est la transformation du plan (ou de l'espace) notée $h_{\Omega;k}$ définie par :

$$M' = h_{\Omega;k}(M) \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \times \overrightarrow{\Omega M}.$$

pour $k > 0$:



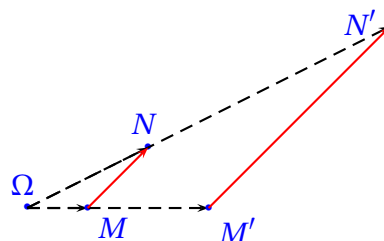
pour $k < 0$:



Remarque : $h_{\Omega;1} = Id$ c'est-à-dire la transformation qui ne change rien.

Proposition 2 : Si $M' = h_{\Omega;k}(M)$ et $N' = h_{\Omega;k}(N)$ alors

$$\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}.$$



→ démonstration

Théorème 2 : La transformation réciproque de $h_{\Omega;k}$ est : $h_{\Omega;\frac{1}{k}}$.

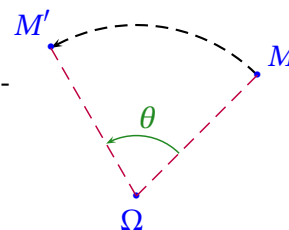
3) Rotations et réflexions dans le plan (HP)

ATTENTION : les rotations sont des transformations du plan.

Définition 5 : Soit Ω un point du plan et θ un nombre réel.

On appelle *rotation de centre Ω et d'angle θ* la transformation du plan notée $r_{\Omega;\theta}$ définie par :

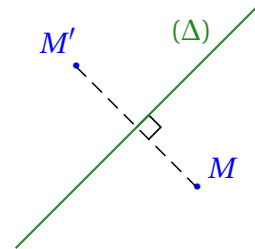
$$M' = r_{\Omega;\theta}(M) \iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \text{et} \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'} \right) = \theta \end{cases}$$



Remarque : Les *symétries centrales* sont des rotations d'angle π .

Définition 6 : Soit Δ une droite du plan.
On appelle *réflexion* d'axe Δ la transformation notée s_Δ définie par :

$$M' = s_\Delta(M) \iff \begin{cases} M' = M \text{ si } M \text{ est sur } \Delta \\ \text{ou bien} \\ \Delta \text{ est la médiatrice de } [MM'] \end{cases}$$



Proposition 3 : On peut déterminer les transformations réciproques des rotations et réflexions :

- La transformation réciproque de $r_{\Omega;\theta}$ est : $r_{\Omega;-\theta}$.
- La transformation réciproque de s_Δ est : s_Δ .

→ démonstration

4) Points invariants

Définition 7 : On appelle *point invariant* d'une transformation f tout point M du plan (ou de l'espace) invariant par f , c'est-à-dire tel que $f(M) = M$.

Proposition 4 : On sait déterminer les points invariants des transformations décrites au dessus :

- Les translations, autres que Id, n'ont pas de points invariants.
- Les homothéties, autres que Id, n'ont qu'un seul point invariant : leur centre Ω .
- Les rotations, autres que Id, n'ont qu'un seul point invariant : leur centre Ω .
- Les réflexions ont pour points invariants tous les points de leur axe Δ .

→ démonstration

II. Propriétés des translations et des homothéties

Dans cette partie on s'intéresse aux propriétés géométriques liées aux translations et aux homothéties. Ainsi dans toute cette partie f désigne une translation ou une homothétie.

1) Propriétés de conservation

Proposition 5 : conservation du barycentre

Soient G , A et B trois points avec $G = \text{bar}\{(A, a), (B, b)\}$ (et $a + b \neq 0$),
 G' , A' et B' leurs images respectives par f alors $G' = \text{bar}\{(A', a), (B', b)\}$.

→ démonstration

Remarque : La propriété est encore vraie pour un barycentre de n (*quelconque*) points pondérés.

Remarque : f conserve notamment les milieux (car un milieu est un isobarycentre).

Proposition 6 : conservation de l'alignement

Les images par f de trois points alignés sont trois points alignés.

→ démonstration

Proposition 7 : conservation des angles orientés

Soient A , B et C trois points d'images respectives A' , B' et C' par f .

Les angles orientés $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'})$ ont alors la même mesure.

→ démonstration

2) Images de figures

Proposition 8 : *Image d'un segment*

L'image par f du segment $[AB]$ est le segment parallèle $[A'B']$,
où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.

→ démonstration

Proposition 9 : *Image d'une droite*

L'image par f de la droite (AB) est la droite parallèle $(A'B')$,
où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.

→ démonstration

Proposition 10 : *Image d'un cercle*

L'image par f du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de rayon r' et de centre A' , où $A' = f(A)$.

On a $r' = r$ si f est une translation.

On a $r' = |k| \times r$ si f est une homothétie de rapport k .

→ démonstration

Remarque : Avec les propriétés de conservation et les images de figure simples on obtient les images de figures géométriques plus compliquées :

l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme,

l'image d'un « point de contact » (entre un cercle et une droite, entre deux cercles, ...) est un point de contact.

3) Effet sur les longueurs, les aires et les volumes

Proposition 11 : • Une translation conserve les longueurs, les aires et les volumes.

• Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, les aires par $|k|^2$ et les volumes par $|k|^3$.

→ démonstration admise