Chap 9 :

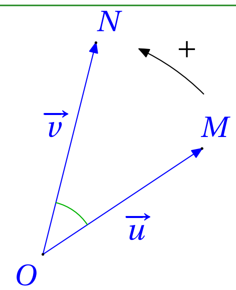
Trigonométrie

Dans tout le chapitre on munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$.

I. Repèrage

1) Angles orientés

Définition 1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on note M et N les points définis par $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.
On appelle *angle orienté* $(\vec{u}\ ; \vec{v})$ l'angle $\widehat{MON}$ mesuré dans le sens trigonométrique.



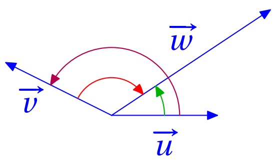
Remarque : Un angle orienté $(\vec{u}\ ; \vec{v})$ a plusieurs mesures, elles diffèrent toutes d'un multiple de 2π .
Ce qui correspond à un ou plusieurs tours du cercle trigonométrique.

Définition 2 : **propriété**
L'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}\ ; \overrightarrow{ON}\right)$ admet une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
Cette mesure est appelée *mesure principale* de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}\ ; \overrightarrow{ON}\right)$.

Proposition 1 : ***Relation de chasles***

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls on a :

$$(\vec{u}\ ; \vec{w}) = (\vec{u}\ ; \vec{v}) + (\vec{v}\ ; \vec{w}).$$



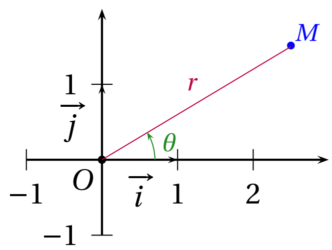
⟶ *démonstration admise*

Corollaire 1 : On a pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
- $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right) = -\left(\vec{v}\,;\,\vec{u}\right)$;
- $\left(-\vec{u}\,;\,-\vec{v}\right) = \left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$;
- $\left(\vec{u}\,;\,-\vec{v}\right) = \left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right) + \pi$;
- $\left(2\vec{u}\,;\,3\vec{v}\right) = \left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$;
- $\left(-2\vec{u}\,;\,3\vec{v}\right) = \left(-\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

2) Coordonnées polaires

Définition 3 : Pour tout point M du plan, autre que l'origine, on appelle *cordonnées polaires* de M tout couple $(r\,;\theta)$ tel que :

$$OM = r \quad \text{et} \quad \theta = \left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right).$$



On peut alors passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes et inversement.

Proposition 2 : Si M a pour coordonnées polaires $(r\,;\theta)$ alors ses coordonnées cartésiennes sont
- $x = r\cos(\theta)$;
- $y = r\sin(\theta)$.

Proposition 3 : Si M a pour coordonnées cartésiennes $\left(x;\,y\right)$ alors ses coordonnées polaires sont
- $r = \sqrt{x^2+y^2}$;
- θ est tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \end{cases}$

II. Formules d'addition

Rappels : On a pour tout réel a :

$$\left\{\begin{array}{ll|ll}
\cos(-a) & = \cos(a) & \sin(-a) & = -\sin(a) \\
\cos(\pi-a) & = -\cos(a) & \sin(\pi-a) & = \sin(a) \\
\cos(\pi+a) & = -\cos(a) & \sin(\pi+a) & = -\sin(a) \\
\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right) & = \sin(a) & \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right) & = \cos(a) \\
\multicolumn{4}{c}{\cos^2(a)+\sin^2(a)=1}
\end{array}\right.$$

Proposition 4 : Pour tous a et b réels on a :

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b. \\ \sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b.\end{array}}$$

⟶ démonstration

A partir de ces formules, on déduit les suivantes :

Proposition 5 : Pour tous a et b réels on a :

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\cos(a-b) & =\cos a.\cos b+\sin a.\sin b \\
\cos(a+b) & =\cos a.\cos b-\sin a.\sin b \\
\sin(a-b) & =\sin a.\cos b-\cos a.\sin b \\
\sin(a+b) & =\sin a.\cos b+\cos a.\sin b \\
\sin(2a) & =2\sin a.\cos a \\
\cos(2a) & =\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a.
\end{array}}$$

⟶ démonstration

1) Equations trigonométriques (HP)

Pour la résolution des équations du type $\cos(x)=\cos(a)$ et $\sin(x)=\sin(a)$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{lcll}
\cos x=\cos\alpha & \iff & \left\{\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ \\ x=-\alpha+2k\pi\end{array}\right. & k\in\mathbb{Z} \\[2ex]
\sin x=\sin\alpha & \iff & \left\{\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ \\ x=\pi-\alpha+2k\pi\end{array}\right. & k\in\mathbb{Z}
\end{array}}$$