Chap 8 :

Produit scalaire

I. Définitions

Rappels :
- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $\|\vec{u}\| = AB$.
- Si $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ est une base orthonormale et si $\vec{u}\,(x, y)$ alors : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- On note $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$ l'angle orienté délimité par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Définition 1 : On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)}.$$

Définition 2 : $\vec{u}\,.\,\vec{u}$ est le *carré scalaire* de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^{\,2}$.

Remarque :
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$.
- On peut noter l'analogie avec la formule : $ab = \dfrac{1}{2}\left[(a+b)^2 - a^2 - b^2\right]$.
- En tant que tel cette définition sert peu en 1°S.

Remarque : Un produit scalaire de deux vecteurs est un *nombre*, pas un vecteur.

Théorème 1 : Si $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ est une base orthonormale et si on a dans cette base $\vec{u}\,(x, y)$ et $\vec{v}\,(x', y')$ alors :

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = x\,x' + y\,y'}.$$

$\longrightarrow$ *démonstration*

II. Propriétés

Proposition 1 : (Linéarité)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$,
- $\vec{u}\,.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$,
- $\left(\lambda\vec{u}\right).\vec{v} = \lambda\left(\vec{u}\,.\,\vec{v}\right) = \vec{u}\,.\left(\lambda\vec{v}\right)$,

$\longrightarrow$ *démonstration laissée en exercice*

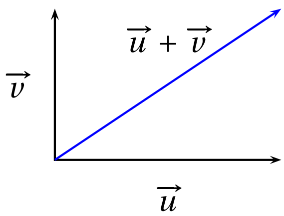
Remarque : On a notamment $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD}$.

Définition 3 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0.$$

Remarque :

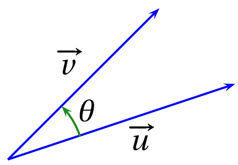
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$: $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ et donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Si $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$ on a :
  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \iff$
  $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 \iff AC^2 = AB^2 + BC^2$.
  Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore : $(AB) \perp (BC)$. D'où la notation d'orthogonalité.



III. Autres expressions du produit scalaire

Théorème 2 : Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)}.$$



$\longrightarrow$ *démonstration*

Proposition 2 : Pour tous points A et B , on a : $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Remarque : Si α est la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ on a : $\alpha = \left|\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)\right|$.

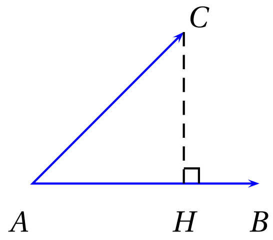
$$\text{Or, } \cos(\alpha) = \begin{cases} \cos\left(\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)\right) & \text{si } \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) \geqslant 0 \\ \cos\left(-\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)\right) & \text{si } \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) \leqslant 0 \end{cases} = \cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)$$

Donc $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \cos\widehat{BAC}$ et on a donc :

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\widehat{BAC}.$$

Théorème 3 : Si H est la projection orthogonale de C sur (AB), $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}$ et ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB.AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont même sens} \\ -AB.AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont sens contraire.} \end{cases}}$$



⟶ *démonstration*

IV. Applications du produit scalaire

1) Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale

Proposition 3 : Dans une base orthonormale $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées : $\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{j}\right)$.

⟶ *démonstration*

2) Vecteur normal à une droite

Définition 4 : On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ est *normal* à une droite $\mathscr{D}$ si $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ et si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à la direction de $\mathscr{D}$.

Proposition 4 : Soit $\mathscr{D}$ une droite passant A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. On a l'équivalence :

$$M \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0.$$

⟶ *démonstration*

Proposition 5 : Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans un repère orthonormal.
Le vecteur $\vec{n}\,(u\,;\,v)$ est normal à $\mathscr{D}$.

⟶ *démonstration*

3) Cercle

Théorème 4 : Dans un repère orthonormal, le cercle de centre $\Omega\left(x_0; y_0\right)$ et de rayon R a pour équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

⟶ *démonstration*

Proposition 6 : Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

⟶ *démonstration*

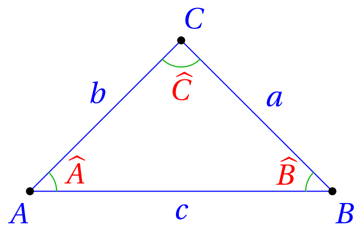
4) Relations dans le triangle

Théorème 5 : (Al-Kashi et Formule des sinus)
Avec les notations de la figure ci-contre, si S désigne l'aire du triangle ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C}$$

et

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = \frac{abc}{2S}.$$



⟶ *démonstration (Il faut faire attention aux angles aigus et obtus.)*

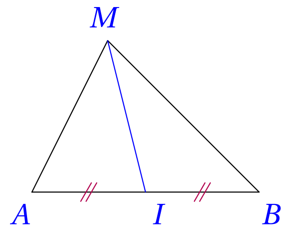
Remarque : On peut réécrire la formule des sinus comme suit :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C}).$$

Théorème 6 : théorème de la médiane

Soient A et B deux points et I le milieu de $[AB]$.
Pour tout point M du plan on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$



⟶ *démonstration*

5) Lignes de niveau

Définition 5 : La *ligne de niveau* λ de l'application f est l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = \lambda$.

Quelques indications pour déterminer certaines lignes de niveau :

- Pour l'application $f(M) = \overrightarrow{AM}.\vec{u}$:
  on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et on construit H le projeté de M sur (AB). On a alors $f(M) = \pm AH.AB$ d'où la position unique de H puis par construction de M : M est sur la perpendiculaire à (AB) é passant par le point unique H .

- Pour l'application $f(M) = MA^2 + MB^2$:
  on note I le milieu de $[AB]$ et alors on a $f(M) = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.
  Si $\lambda < \frac{1}{2}AB^2$ il n'y a pas de solution sinon l'ensemble des points M est un cercle de centre I (et de rayon calculable).

- Pour l'application $f(M) = MA^2 - MB^2$:
  on note I le milieu de $[AB]$ et alors on a $f(M) = 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}$.
  On se retrouve alors dans un cas du type $f(M) = \overrightarrow{AM}.\vec{u}$.

- Pour l'application $f(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$:
  on note I le milieu de $[AB]$ et alors on a $f(M) = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.
  Si $\lambda < -\frac{1}{4}AB^2$ il n'y a pas de solution sinon l'ensemble des points M est un cercle de centre I (et de rayon calculable).