Chap 5 :

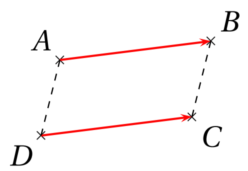
Barycentres

I. Vecteurs

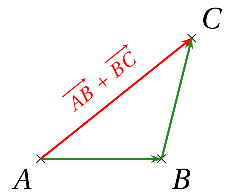
1) Définitions

Définition 1 : Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est défini par une *direction*, un *sens* et une longueur (appelée *norme*).
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB.
Elle est notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Ainsi $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.

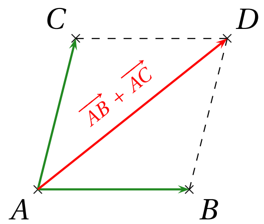
Proposition 1 : Lorsque les points A, B, C et D, ne sont pas alignés,
on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff ABCD$ est un parallèlogramme.



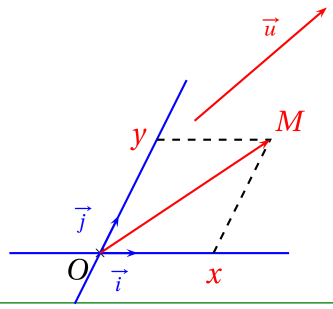
Définition 2 : Relation de Chasles :
On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Remarque : « Règle du parallélogramme »:
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \iff ABDC$ est un parallèlogramme.



Définition 3 : Dire que $(x; y)$ sont les *coordonnées* (uniques) du point M dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
On note : $M(x; y)$.
Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. On note : $\overrightarrow{u}(x; y)$.



Remarque : Ainsi, dire que les coordonnées de $\vec{u}$ dans le repère $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$ sont $(x; y)$ signifie que $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.
(On dit aussi que $(x; y)$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}\ ; \vec{j}\right)$).

2) Colinéarité

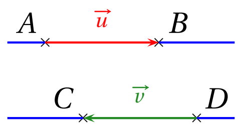
Définition 4 : Lorsque le vecteur $\vec{u}$ et le nombre k sont non nuls, le vecteur $k\vec{u}$ a :

- même direction que $\vec{u}$,
- même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et sens contraire si $k < 0$.
- pour norme le réel $|k| \times \|\vec{u}\|$.

Remarque : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

ATTENTION , la « multiplication » et la « division » entre vecteurs n'est pas définie.

Définition 5 : Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *colinéaires* s'ils ont la même direction, c'est-à-dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles (voir éventuellement confondues).



On peut également dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

Remarque : Par *convention*, le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

Proposition 2 :

- Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$.

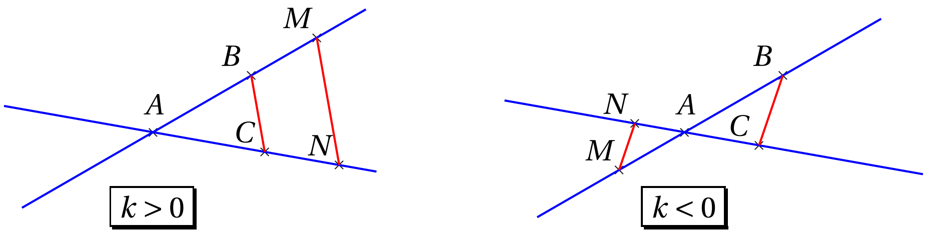
On peut caractériser la colinéarité avec les coordonnées.

Proposition 3 : les vecteurs $\vec{u}\,(x; y)$ et $\vec{v}\,(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

(Forme vectorielle du théorème de Thalès)

Théorème 1 : Soit ABC un triangle. M sur (AB) et N sur (AC).

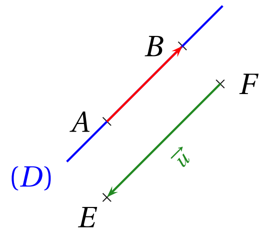
- Si (MN) est parallèle à (BC), on note k le nombre tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, on a alors : $\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{BC}$.



- **(Réciproque)** S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC}$, alors (MN) et (BC) sont parallèles.

3) Vecteurs directeurs et équations de droites

Définition 6 : Un *vecteur directeur* d'une droite (D) est un vecteur dont la direction est celle de (D). En particulier, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et tous les vecteurs directeurs de cette droite sont les vecteurs $k\,\overrightarrow{AB}$, où k est un réel non nul.



Proposition 4 : Toute droite (D) est **caractérisée** par une *équation cartésienne* de la forme

$ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Le vecteur $\vec{u}\,(-b\,;\,a)$ est alors un vecteur directeur de (D).

Proposition 5 : Toute droite **non parallèle à l'axe des ordonnées** a une *équation réduite* de la forme :

$y = mx + p$.

Proposition 6 :

- Les droites d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.
- Les droites d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$.

II. Barycentre

1) Barycentre de deux points

La notion mathématique de barycentre est intuitivement très proche de la notion physique de centre de gravité et en fait le centre de gravité est défini comme un barycentre.

Théorème 2 : **: Définition**
Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$, α et β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$.
Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}.$$

Ce point est appelé *barycentre* des deux points pondérés (A,α) et (B,β) .

On note $G=\text{bar}\left\{(A,\alpha),(B,\beta)\right\}$.

⟶ *démonstration*

Définition 7 : Si $\alpha=\beta\neq 0$ *(et notamment $\alpha=\beta=1$)*, on dit que G est l' *isobarycentre* de A et B.

Remarque : L'isobarycentre de A et B est le milieu de $[AB]$, c'est le point I tel que $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$.

Théorème 3 : Soient α et β tels que $\alpha+\beta\neq 0$ et soient A, B et G trois points du plan $\mathscr{P}$,

$$G=\text{bar}\left\{(A,\alpha),(B,\beta)\right\} \iff \forall M\in\mathscr{P},\ \alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}.$$

⟶ *démonstration*

Proposition 7 : Le barycentre de (A,α) et (B,β) est situé sur la droite (AB).

⟶ *démonstration*

Remarque : Si α et β sont de même signe, $G\in[AB]$.
Si α et β sont de signes contraires, $G\notin[AB]$.
Si $|\alpha|>|\beta|$ alors G est plus près de A que de B.
Penser à l'équilibre d'une barre avec une masse à chaque bout.

⟶ *démonstration*

Remarque : Pour tout nombre k non nul : $G=\text{bar}\left\{(A,\alpha),(B,\beta)\right\}=\text{bar}\left\{(A,k\alpha),(B,k\beta)\right\}$.

Théorème 4 : Soit G le barycentre de (A, α) et (B, β) et $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ un repère du plan.
Si $A(x_A\,; y_A)$ et si $B(x_B\,; y_B)$ alors les coordonnées de G dans ce repère sont :

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}\,; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}\right).$$

$\longrightarrow$ *démonstration*

2) Barycentre de trois points

Théorème 5 : **: Définition**
Soient A, B et C trois points du plan $\mathscr{P}$, α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.
Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}\,.$$

Ce point est appelé *barycentre* des trois points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ).

On note $G = \text{bar}\left\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\right\}$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Définition 8 : Si $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$, *(et notamment si $\alpha = \beta = \gamma = 1$)* on dit que G est l' *isobarycentre* de A, B et C.

Remarque : Par *définition* le *centre de gravité* G d'un triangle ABC est l'isobarycentre des points A, B et C. On a donc : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Théorème 6 : Soient α, β et γ tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et soient A, B, C et G quatre points du plan $\mathscr{P}$, on a alors :

$$G = \text{bar}\left\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall M \in \mathscr{P},\ \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MG}\,.$$

$\longrightarrow$ *démonstration*

Remarque : Pour tout nombre k non nul : $G = \text{bar}\left\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\right\} = \text{bar}\left\{(A,k\alpha),(B,k\beta),(C,k\gamma)\right\}$.

L'analogie entre barycentres et centres de gravité de physique permet de mieux comprendre le théorème du barycentre partiel. Pour cela il suffit de penser à l'équilibre d'une barre en T avec des poids aux 3 extremités

Théorème 7 : théorème du barycentre partiel
Si $H = \text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ alors on a l'équivalence :

$$G = \text{bar}\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\} \iff G = \text{bar}\{(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}.$$

⟶ *démonstration*

Théorème 8 : Soit G le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ) et $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère du plan.
Si $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$ et $C(x_C\,;y_C)$ alors les coordonnées de G dans ce repère sont :

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\,;\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right).$$

⟶ *démonstration*

3) Barycentre de n points (HP)

On peut généraliser à un nombre plus grand de points la notion de barycentre. Les propriétés resteront alors similaires.

Dans toute la suite n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Théorème 9 : Soient n points du plan $\mathscr{P}$ $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$. Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}.$$

Ce point est appelé *barycentre* des n points pondérés (A_1 , α_1), (A_2 , α_2),..., (A_n , α_n).
On note $G = \text{Bar}\left\{(A_1 , \alpha_1), (A_2 , \alpha_2), \ldots, (A_n , \alpha_n)\right\}$.

Théorème 10 : Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$ et soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et G qui sont $n+1$ points du plan $\mathscr{P}$, on a l'équivalence

$$G = \text{Bar}\left\{(A_1 , \alpha_1), (A_2 , \alpha_2), \ldots, (A_n , \alpha_n)\right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall M \in \mathscr{P},\ \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}.$$

Théorème 11 : Soit G le barycentre de $(A_1 , \alpha_1), (A_2 , \alpha_2), \ldots, (A_n , \alpha_n)$ et $\left(O; \overrightarrow{i} ; \overrightarrow{j}\right)$ un repère du plan. Si $A_1(x_{A_1} ; y_{A_1})$, $A_2(x_{A_2} ; y_{A_2})$, ..., $A_n(x_{A_n} ; y_{A_n})$ alors les coordonnées de G dans ce repère sont :

$$G\left(\frac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \cdots + \alpha_n x_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n} ; \frac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \cdots + \alpha_n y_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\right).$$