Chap 9 :

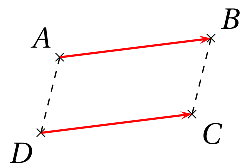
Géométrie vectorielle

I. Vecteurs

1) Définitions

Définition 1 : Un vecteur $\vec{u}$ est défini par une *direction*, un *sens* et une longueur (appelée *norme*).
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB.
Elle est notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Ainsi $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.

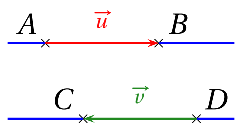
Proposition 1 : Lorsque les points A, B, C et D, ne sont pas alignés,
on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff ABCD$ est un parallèlogramme.



2) Colinéarité

ATTENTION , la « multiplication » et la « division » entre vecteurs n'existe pas.

Définition 2 : Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *colinéaires* s'ils ont la même direction, c'est-à-dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles (voir éventuellement confondues).



Remarque : On peut également dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

Proposition 2 :
- Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$.
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$.

3) coordonnées

On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

Proposition 3 : Soient A et B deux points du plan de coordonnées $\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $\left(x_B\,;\,y_B\right)$.
Soit $\vec{u}$ de coordonnées $(x;\,y)$. On a :

- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\right)$;
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ *(uniquement parce que le repère est orthonormal)* ;
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On peut caractériser la colinéarité avec les coordonnées.

Proposition 4 : les vecteurs $\vec{u}\,(x;\,y)$ et $\vec{v}\,(x';\,y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

II. Barycentre

1) Barycentre de deux points

La notion mathématique de barycentre est intuitivement très proche de la notion physique de centre de gravité et en fait le centre de gravité est défini comme un barycentre.

Théorème 1 : : Définition
Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$, α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.
Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}\,.$$

Ce point est appelé *barycentre* des deux points pondérés (A,α) et (B,β) .

On note $G = \text{bar}\left\{(A,\alpha),(B,\beta)\right\}$.

Définition 3 : Si $\alpha = \beta \neq 0$ *(et notamment $\alpha = \beta = 1$)*, on dit que G est l' *isobarycentre* de A et B.

Remarque : L'isobarycentre de A et B est le milieu de $[AB]$, c'est le point I tel que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Proposition 5 : Le barycentre de (A, α) et (B, β) est situé sur la droite (AB).

Remarque : On a toujours $\text{bar}\left\{(A,\alpha),(B,\beta)\right\} = \text{bar}\left\{(A,800\alpha),(B,800\beta)\right\}$.

Théorème 2 : Soit G le barycentre de (A, α) et (B, β) et $\left(O; \vec{i}\,;\vec{j}\right)$ un repère du plan.
Si $A(x_A\,;\,y_A)$ et si $B(x_B\,;\,y_B)$ alors les coordonnées de G dans ce repère sont :

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\,;\,\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right).$$

2) Barycentre de trois points

Théorème 3 : : Définition
Soient A, B et C trois points du plan $\mathscr{P}$, α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Ce point est appelé *barycentre* des trois points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ).

On note $G=\text{bar}\left\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\right\}$.

Définition 4 : Si $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$, *(et notamment si $\alpha=\beta=\gamma=1$)* on dit que G est l' *isobarycentre* de A, B et C.

Remarque : Par *définition* le *centre de gravité* G d'un triangle ABC est l'isobarycentre des points A, B et C. On a donc : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

III. Produit scalaire

Dans toute cette partie on munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

1) Expressions et propriétés

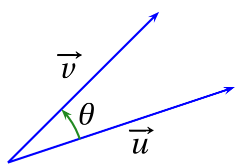
Définition 5 : Soient $\vec{u}\,(x, y)$ et $\vec{v}\,(x', y')$ dans le repère $\left(O; \vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = x\,x' + y\,y'}.$$

Définition 6 : $\vec{u}\,.\,\vec{u}$ est le *carré scalaire* de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^{\,2}$.

Théorème 4 : Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ on a :

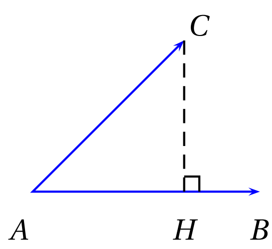
$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta}.$$



Remarque : On a notamment $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

Théorème 5 : Si H est la projection orthogonale de C sur (AB) ,
$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}$ et ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont sens contraire.} \end{cases}}$$



Proposition 6 : (Linéarité)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan . Alors :

- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$,
- $\vec{u}\,.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$,
- $\left(3\,\vec{u}\right).\,\vec{v} = 3\left(\vec{u}\,.\,\vec{v}\right) = \vec{u}\,.\left(3\,\vec{v}\right)$,

Remarque : On a notamment $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{CD} = -\,\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD}$.

2) Vecteur normal à une droite

Définition 7 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0.$$

Proposition 7 : L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0$ est la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A qui est perpendiculaire à la direction de $\vec{n}$.

On dit que le vecteur $\vec{n}$ est *normal* à la droite $\mathscr{D}$.

Proposition 8 : Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ux+vy+w=0$ dans un repère orthonormal.

Le vecteur $\vec{n}\,(u;\,v)$ est normal à $\mathscr{D}$.

3) Cercle

Théorème 6 : Dans le repère orthonormal $\left(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$, le cercle de centre $A\left(x_A;y_A\right)$ et de rayon R a pour équation :

$$\left(x-x_A\right)^2+\left(y-y_A\right)^2=R^2.$$

Proposition 9 : Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0.$$