Chap 8 :

Fonctions circulaires

I. Les fonctions sinus et cosinus

On rappelle que les fonctions cos et sin correspondent aux définitions vu au collège dès que l'on mesure les angles en *radians*.
Il y a un lien entre radians et degrés : $\boxed{\pi\ rad = 180°}$.

1) Définitions

Les fonctions cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1 : Les fonctions cos et sin sont *2π-périodique* sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout réel x on a : $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ et $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$.

Proposition 2 : La fonction cos est *paire* , la fonction sin est *impaire*, c'est-à-dire que pour tout réel x on a : $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

2) Variations

Proposition 3 : La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(\cos(x)\right)' = -\sin(x)$.
La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$.

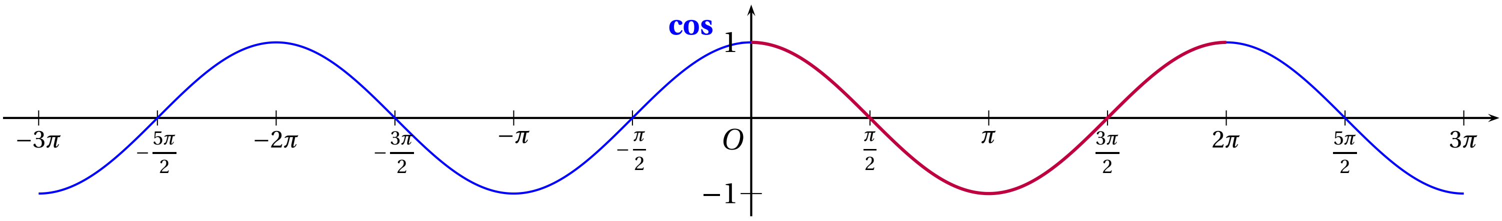
Remarque : En éléctronique on utilise très souvent les fonctions cos et sin.
les caractéristiques d'un courant alternatif telles que la *différence de potentiel* ou l'*intensité* peuvent être des fonctions du type $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$ ou $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$.
On a alors $U'(t) = -\omega U_0 \sin(\omega t + \phi)$ ou $I'(t) = \omega I_0 \cos(\omega t + \phi)$.

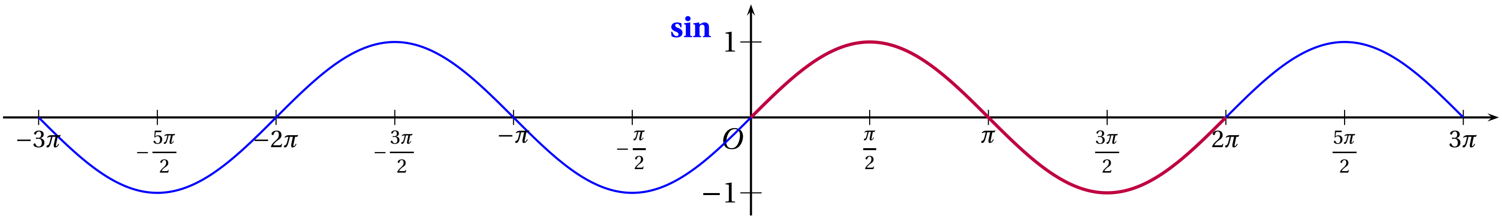
On peut alors dresser les tableau de variations des fonctions cos et sin sur $[0; 2\pi[$.

x	0		π		2π
$-\sin(x)$		$-$	0	$+$	
$\cos(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Grâce aux renseignements précédents on peut tracer les courbes représentatives de cos et sin :





Remarque : On voit bien sur les courbes la parité et la périodicité des fonctions.

Proposition 4 : On voit que pour tout x réel : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

Remarque : C'est pour cela qu'on a $-U_0 \leqslant U(t) \leqslant U_0$ ou $-I_0 \leqslant I(t) \leqslant I_0$.

II. Equations trigonométriques

On appelle équation trigonométrique les équations qui comportent des cos et/ou des sin.
En 1°STI on s'intéresse aux équations $\cos(x) = \cos(a)$ et $\sin(x) = \sin(a)$ où a est un nombre quelconque.

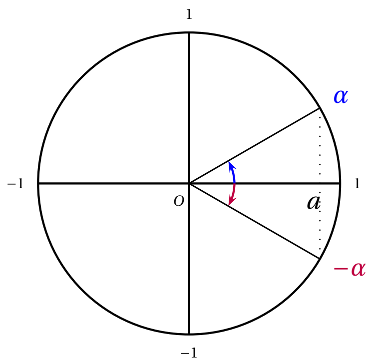
1) L'équation $\cos(x) = a$

D'après la proposition 4 l'équation $\cos(x) = a$ ne peut pas avoir de solution si a n'est pas $[-1;1]$.

On se restreint donc à $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Grâce au cercle trigonométrique on trouve deux solutions à l'équation et ces solutions sont opposées.

On les nomme donc α et $-\alpha$.



Pour déterminer ***toutes*** les solutions de $\cos(x) = a$ il suffit alors de rajouter ou d'enlever à α et à $-\alpha$ un nombre quelconque de tours, les positions sur le cercle restant les mêmes.
un tour c'est $2\pi rad$ donc k tours c'est $2k\pi rad$.
Les solutions de $\cos(x) = a$ sont donc les $\alpha + 2k\pi$ et les $-\alpha + 2k\pi$ pour tous les k entiers (k est le nombre de tours).

Proposition 5 : Les solutions de $\cos(x) = a$ sont les $\left\{\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right.$ pour $k \in \mathbb{Z}$ avec $\cos(\alpha) = a$.

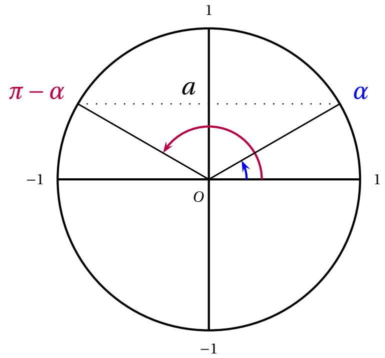
2) L'équation $\sin(x) = a$

D'après la proposition 4 l'équation $\sin(x) = a$ ne peut pas avoir de solution si a n'est pas $[-1;1]$.

On se restreint donc à $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Grâce au cercle trigonométrique on trouve deux solutions à l'équation et ces solutions sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

On les nomme donc α et $\pi - \alpha$.



Pour déterminer ***toutes*** les solutions de $\sin(x) = a$ il suffit alors de rajouter ou d'enlever à α et à $\pi-\alpha$ un nombre quelconque de tours, les positions sur le cercle restant les mêmes.
un tour c'est $2\pi rad$ donc k tours c'est $2k\pi rad$.
Les solutions de $\sin(x) = a$ sont donc les $\alpha + 2k\pi$ et les $\pi - \alpha + 2k\pi$ pour tous les k entiers (k est le nombre de tours).

Proposition 6 : Les solutions de $\sin(x) = a$ sont les $\left\{\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right.$ pour $k \in \mathbb{Z}$ avec $\sin(\alpha) = a$.

III. Formules d'addition

Proposition 7 : On a pour tout réel a :

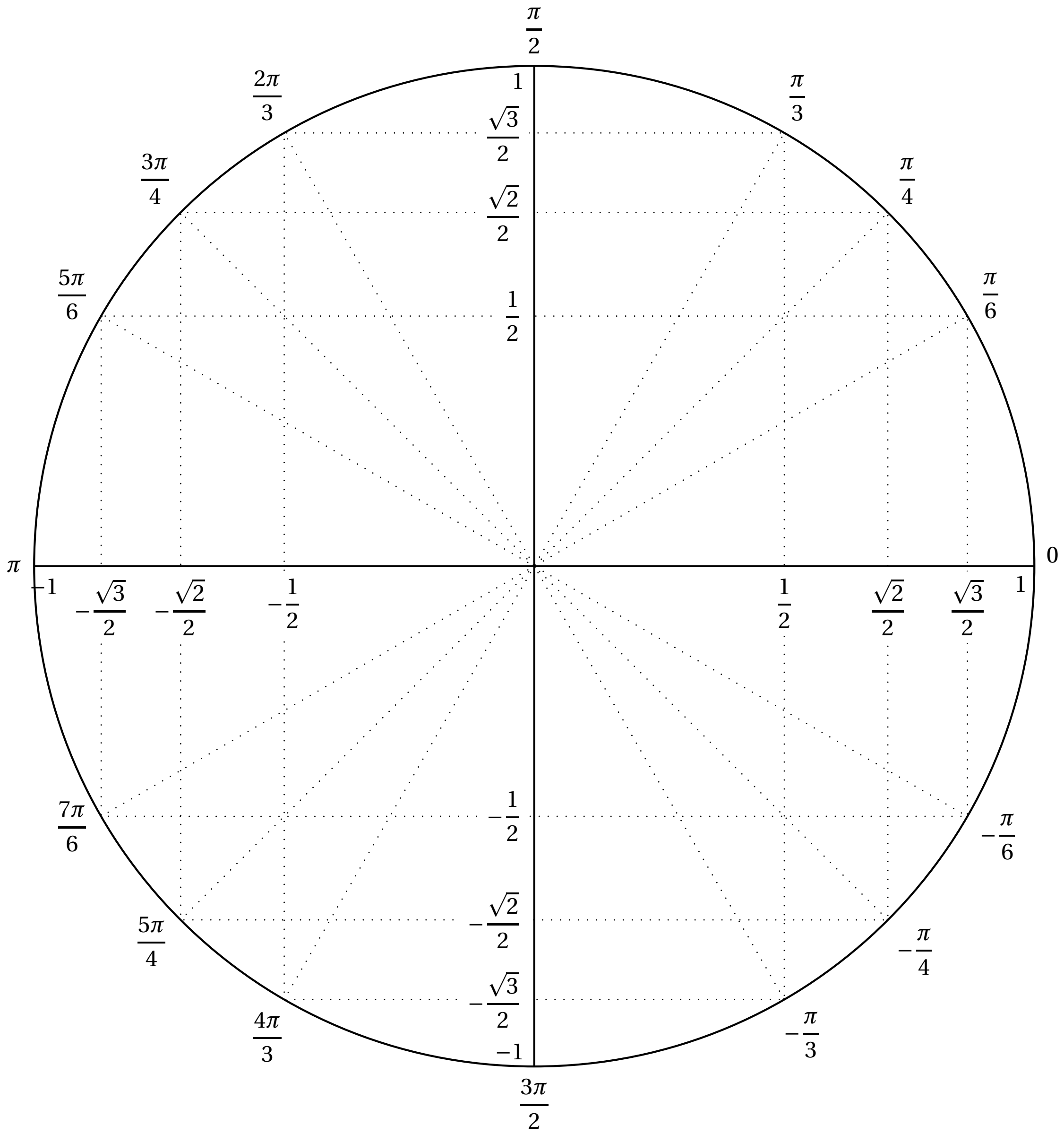
$$\begin{array}{rcl|rcl}
\cos(-a) & = & \cos(a) & \sin(-a) & = & -\sin(a) \\
\cos(\pi - a) & = & -\cos(a) & \sin(\pi - a) & = & \sin(a) \\
\cos(\pi + a) & = & -\cos(a) & \sin(\pi + a) & = & -\sin(a) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) & = & \sin(a) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) & = & \cos(a)
\end{array}$$

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

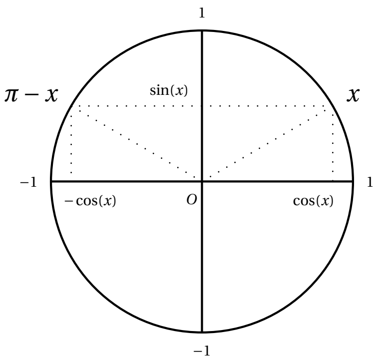
Proposition 8 : Pour tous a et b réels on a :

$$\boxed{\begin{array}{rl}
\cos(a - b) = & \cos a.\cos b + \sin a.\sin b \\
\cos(a + b) = & \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \\
\sin(a - b) = & \sin a.\cos b - \cos a.\sin b \\
\sin(a + b) = & \sin a.\cos b + \cos a.\sin b \\
\sin(2a) = & 2\sin a.\cos a \\
\cos(2a) = & \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.
\end{array}}$$

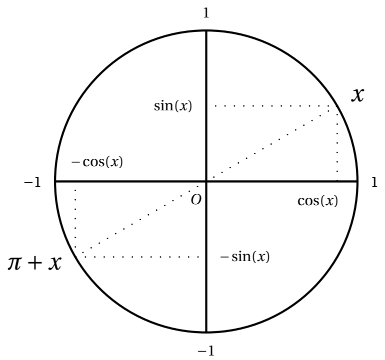
IV. Valeurs remarquables et cercle trigonométrique



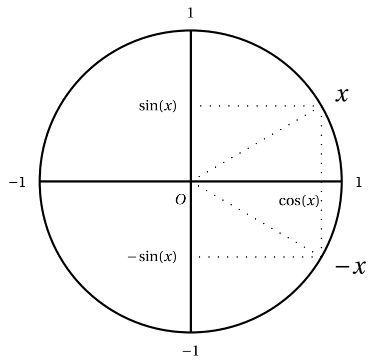
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



$$\begin{cases} \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos(\pi + x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) &= -\sin(x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \end{cases}$$