Corrigé Devoir Maison 5

Exercice 1 : *Le flocon de Koch*

1. Etude du nombre de côtés

1) C_1 est le nombre de segments à la première étape donc $C_1 = 3$.
   D'après la figure du livre on a $C_2 = 12$ et $C_3 = 48$.
   A chaque itération chaque segment est transformé en 4 segments par conséquent on a :
   $C_4 = 4 \times 48 = 192$.
2) A chaque itération chaque segment est transformé en 4 segments par conséquent on a, pour tout entier n : $C_{n+1} = 4 \times C_n$.
   La suite $(C_n)_{n \geqslant 1}$ est donc géométrique de raison 4.
   On a ainsi, pour tour entier n : $C_n = C_1 \times (4)^{n-1} = 3 \times 4^{n-1}$.

2. Etude du périmètre

1) Puisque la transformation transforme 1 segment en 4 segments de même longueur et que les 3 segments de départ sont de même longueur les segments ont tous la même longueur à l'étape n. On peut donc parler de ***la*** longueur d' ***un*** segment à l'étape n .
2) La transformation transforme un segment en 4 segments de longueur $\frac{1}{3}$ du segment originel.
   Par conséquent on a, pour tout entier n : $u_{n+1} = \frac{1}{3} \times u_n$.
   La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est ainsi géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
   On peut donc écrire $u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 \times \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1}}$.
3) A l'étape n le flocon est composé de C_n segments de longueurs u_n.
   On obtient donc $P_n = C_n \times u_n = 3 \times 4^{n-1} \times \frac{1}{3^{n-1}} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.
   Ce qui est bien la formule demandée.
4) On nous demande de déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.
   Or (P_n) est une suite géométrique de raison supérieure à 1 et de premier terme positif par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = +\infty$.

3. Etude de l'aire

1) Pour calculer A_1 il nous faut déterminer la hauteur h dans le triange équilatéral de côté 1.
   Cette hauteur est aussi médiatrice dans ce triangle car il est équilatéral. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ainsi formé : $1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2$ puis $h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et enfin $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   On a ainsi $A_1 = \frac{1 \times h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2) Par proportionnalité un triangle équilatéral de côté a a une hauteur de longueur $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ et donc comme aire $\dfrac{a\times\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = a^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
La différence $A_{n+1} - A_n$ correspond à l'aire des C_n triangles équilatéraux de côté u_{n+1} par conséquent il suit que

$$\begin{aligned}
A_{n+1} - A_n &= C_n\times\left(u_{n+1}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\\
&= 3\times4^{n-1}\times\left(\frac{1}{3^n}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\\
&= 3\times4^{n-1}\times\frac{1}{3^{2n}}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\\
&= 3\times4^{n-1}\times\left(\frac{1}{3^2}\right)^n\times\frac{\sqrt{3}}{4}\\
&= 3\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^{n-1}\times\frac{1}{9^n}\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{9}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

3) On remarque que la somme $(A_n - A_{n-1}) + \cdots + (A_2 - A_1)$ est une somme télescopique donc on a $(A_n - A_{n-1}) + \cdots + (A_2 - A_1) = A_n - A_1 = A_n - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
D'après l'expression trouvée de $A_{n+1} - A_n$ on voit que la suite $\left(A_n - A_{n-1}\right)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{9}$ et de premier terme $A_2 - A_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.
La somme ainsi demandée est donc la somme des $n-1$ premiers termes de la suite géométrique $(A_n - A_{n-1})$:
Attention à ne pas se tromper sur les indices, pour être sûr de sa valeur on vérifie que pour $n = 3$ on a bien le bon nombre de termes, à savoir 2 qui sont $A_3 - A_2$ et $A_2 - A_1$, ce qui est le cas.

$$\begin{aligned}
(A_n - A_{n-1}) + \cdots + (A_2 - A_1) &= \frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{9}}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{\frac{5}{9}}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{9}{5}\times\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

De ce qui précéde on déduit donc pour $n \geqslant 2$: $\quad A_n - \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{20}\left(1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$

et donc $\quad A_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{20}\left(1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$.

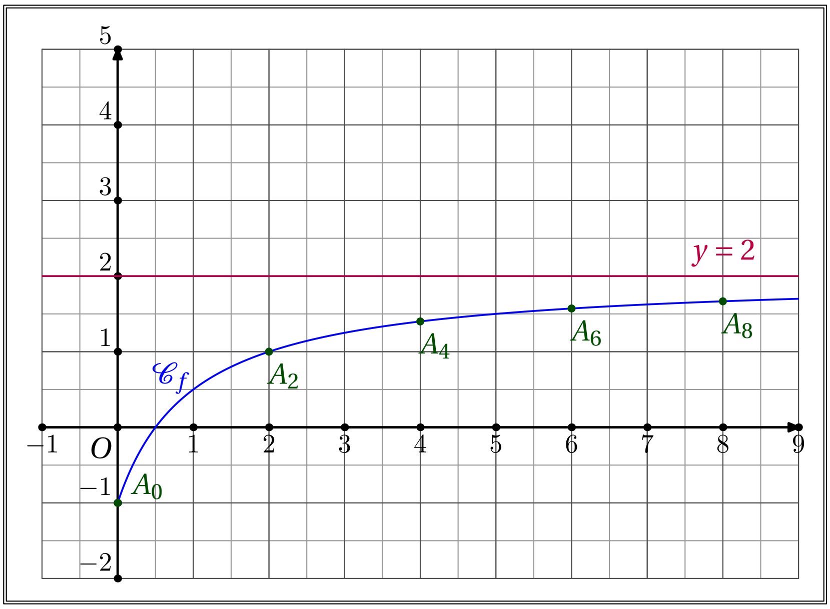
4) On nous demande de déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

Puisque $\frac{4}{9}$ est comprise entre -1 et 1 on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}=0$ puis, par somme et produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}\times 1=\frac{5\sqrt{3}}{20}+\frac{3\sqrt{3}}{20}$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

A l'étape $+\infty$ on obtiendrait donc une figure qui aurait un bord infini mais une aire finie, c'est une fractale.

Exercice 2 : *Comportement asymptotique*

1) On trace la courbe $\mathscr{C}_f$ et on place les points A_0, A_2, A_4, A_6 et A_8.



2) On a $u_n=f(n)=\frac{2n-1}{n+1}$.

3) On réécrit u_n : $u_n=\frac{2n-1}{n+1}=\frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ ce qui est bien l'expression voulue.

4) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc par sommes des limites $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$ puis par quotient des limites on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2$.

   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$.

5) On trace la droite d'équation $y=2$ sur le graphique précédent.

6) Le segment $[A_nB_n]$ est vertical donc la longueur A_nB_n est la différence des ordonnées (en valeur absolue). Le point B_n a pour ordonnée 2 donc :

$$A_nB_n=|2-u_n|=\left|2-\frac{2n-1}{n+1}\right|=\left|\frac{2(n+1)-(2n-1)}{n+1}\right|=\left|\frac{3}{n+1}\right|=\frac{3}{n+1}.$$

   On a ainsi montré que $A_nB_n=\frac{3}{n+1}$.

7) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$ donc par quotient des limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n+1}=0$.

   Autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} A_nB_n=0$.

   Cela signifie que plus n est grand plus le point A_n se rapproche du point B_n.