Corrigé devoir Maison 1

Exercice 1 : ***Equations***

On résout les équations suivantes .

1) Pour résoudre cette équation du second degré on calcule son discriminant : $\Delta = 3+4(1+\sqrt{2}) = 7+4\sqrt{2}$, il est positif donc l'équation admet deux solutions qui sont

$$x_1 = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2(1+\sqrt{2})} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2(1+\sqrt{2})}$$

$$x_1 = \frac{(1-\sqrt{2})\Big(-\sqrt{3}+\sqrt{7+4\sqrt{2}}\Big)}{2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{(1-\sqrt{2})\Big(-\sqrt{3}-\sqrt{7+4\sqrt{2}}\Big)}{2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$

$$x_1 = \frac{(\sqrt{2}-1)\Big(-\sqrt{3}-\sqrt{7+4\sqrt{2}}\Big)}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{(\sqrt{2}-1)\Big(-\sqrt{3}-\sqrt{7+4\sqrt{2}}\Big)}{2}.$$

Les solutions de cette équation sont donc $\frac{(\sqrt{2}-1)\left(-\sqrt{3}-\sqrt{7+4\sqrt{2}}\right)}{2}$ et $\frac{(\sqrt{2}-1)\left(-\sqrt{3}-\sqrt{7+4\sqrt{2}}\right)}{2}$.

Remarque : Ce n'est pas parce que les écritures des nombres sont compliquées que les calculs le sont...

2) L'équation de l'énoncé est équivalente aux équations suivantes :

$$\frac{4}{x-2} = x+3 \Leftrightarrow \frac{4}{x-2} - (x+3) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-x+10}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-x+10=0 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Remarque : $A \Leftrightarrow B$ se lit « A est équivalent à B », on peut le traduire par si A est vrai alors B est vrai et si B est vrai alors A est vrai.

Il nous faut donc résoudre $-x^2-x+10=0$. On a $\Delta = 1+40 = 41$ et donc deux solutions qui sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{41}}{-2} = \frac{\sqrt{41}-1}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{41}}{-2} = \frac{-\sqrt{41}-1}{2}$. Ces deux solutions sont bien distinctes de 2 donc l'équation (de départ) admet deux solutions qui sont $\frac{\sqrt{41}-1}{2}$ et $\frac{-\sqrt{41}-1}{2}$.

3) L'équation de l'énoncé est équivalente aux équations suivantes :

$$\frac{2}{x-1} + \frac{-5}{2-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(2-x)-5(x-1)}{(x-1)(2-x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{9-7x}{(x-1)(2-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9-7x=0 \\ x \neq 1 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}.$$

Il nous faut donc résoudre $9-7x=0$ qui a pour solution $x = \frac{9}{7}$. $\frac{9}{7}$ est différent de 1 et de 2 donc l'équation (de départ) admet comme solution $\frac{9}{7}$.

4) En suivant l'indication on veut factoriser le trinôme x^2+3x+2, Pour cela il nous faut déterminer ses éventuelles racines. -1 est une racine évidente donc son autre racine x_2 (éventuellement égale à -1) est telle que $-1 \times x_2 = \frac{2}{1}$ c'est-à-dire $x_2 = -2$.

On obtient ainsi la factorisation suivante $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ et on peut réécrire l'équation $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2-1} + \frac{2x}{x+2} = 0$.

Cette dernière est aussi $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x}{x+2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{2x}{x+2}=0 \\ x\neq -1 \end{cases}$.

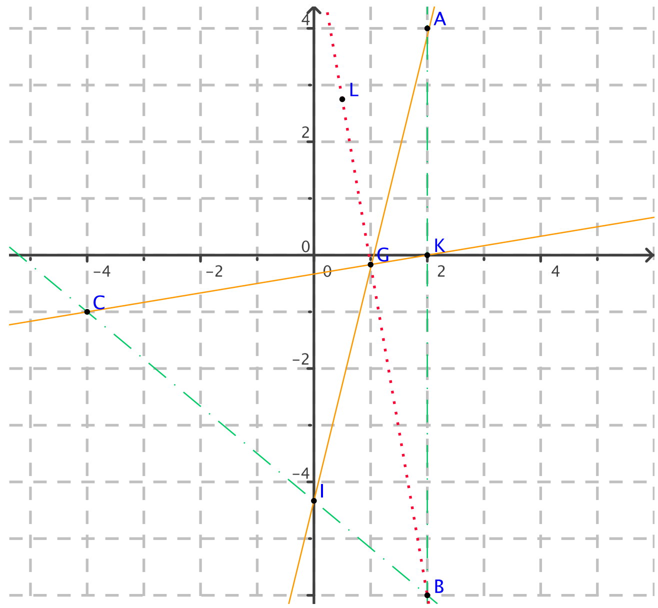
Il nous faut donc résoudre $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{2x}{x+2}=0$ qui est équivalente à
$\dfrac{(x+2)^2+2x(x-1)}{(x-1)(x+2)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2+2x+4}{(x-1)(x+2)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+2x+4=0 \\ x\neq 1 \text{ et } x\neq -2 \end{cases}$.
Il nous faut donc (encore!) résoudre $3x^2+2x+4=0$. On a $\Delta=4-48=-44$ donc cette équation n'admet pas de solution et à fortiori l'équation $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+2}=0$ non plus.

Exercice 2 : *Autour du discriminant*

1) La traduction mathématique de la question est $f(-3)=0$ c'est-à-dire $9-9+p=0$, il faut donc $p=0$.
2) Si l'équation $f(x)=0$ n'admet qu'une seule solution cela signifie que le discriminant du trinôme est nul. On a donc $\Delta=9-4p=0$ c'est-à-dire $p=\dfrac{9}{4}$.
3) On retrouve la forme canonique de f : $x^2+3x+p=(x+\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{9}{4}+p$. Le minimum de f est donc atteint lorsque $(x+\dfrac{3}{2})^2$ est nul (pour $x=-\dfrac{3}{2}$ donc) le minimum vaut alors $p-\dfrac{9}{4}$.
4) Pour déterminer les solutions de $f(x)=0$ il nous faut connaitre le signe de Δ. D'après la question 2) on a $\Delta=9-4p$. Il nous faut donc distinguer trois cas pour p.
   - Si $\Delta<0$ c'est-à-dire $p>\dfrac{9}{4}$, l'équation n'admet pas de solution. f est alors toujours positive.
   - Si $\Delta=0$ c'est-à-dire $p=\dfrac{9}{4}$, l'équation admet une solution (double) $-\dfrac{3}{2}$. f est alors toujours positive sauf en $\dfrac{3}{2}$ où elle est nulle.
   - Enfin si $\Delta>0$ c'est-à-dire $p<\dfrac{9}{4}$, l'équation admet deux solutions qui sont $\dfrac{-3-\sqrt{9-4p}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{9-4p}}{2}$. f est alors positive sur $\left]-\infty;\frac{-3-\sqrt{9-4p}}{2}\right[\bigcup\left]\frac{-3+\sqrt{9-4p}}{2};+\infty\right[$ et négative sur $\left]\frac{-3-\sqrt{9-4p}}{2};\frac{-3+\sqrt{9-4p}}{2}\right[$.

Exercice 3 : *Géométrie analytique*

1) On réalise une figure correspondant à l'énoncé.



2) On a $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ donc $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. On peut ainsi placer le point I et déterminer facilement ses coordonnées, que l'on appelle $(x_I;y_I)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{BI}$ sont $(x_I-2;y_I+6)$ et celle de $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ $\left(\frac{1}{3}(-4-2);\frac{1}{3}(-1+6)\right)$ c'est-à-dire $\left(-2;\frac{5}{3}\right)$. On a donc $x_I-2=-2$ et $y_I+6=\frac{5}{3}$. Les coordonnées de I sont donc $\left(0;-\frac{13}{3}\right)$.

3) On peut appliquer le même raisonnement pour K. On a $3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{0}$ donc $3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. On appelle $(x_K;y_K)$ les coordonnées de K. Les coordonnées de $\overrightarrow{AK}$ sont $(x_K-2;y_K-4)$ et celle de $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ $\left(\frac{2}{5}(2-2);\frac{2}{5}(-6-4)\right)$ c'est-à-dire $(0;-4)$. On a donc $x_K-2=0$ et $y_K-4=-4$. Les coordonnées de K sont donc $(2;0)$. On peut ainsi placer le point K.

4) Les points G, I et A sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires. Leurs coordonnées vérifient donc le critère de colinéarité. On a $\overrightarrow{IG}\left(x-0;y+\frac{13}{3}\right)$ et $\overrightarrow{IA}\left(2-0;4+\frac{13}{3}\right)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{IG}\left(x;y+\frac{13}{3}\right)$ et $\overrightarrow{IA}\left(2;\frac{25}{3}\right)$. Le critère de colinéarité nous permet d'écrire que $x\times\frac{25}{3}-\left(y+\frac{13}{3}\right)\times 2=0$ qu'on peut réécrire $25x-6y-26=0$.

   On a la même chose pour G, K et C. Les vecteurs $\overrightarrow{KG}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires. Leurs coordonnées vérifient donc le critère de colinéarité. On a $\overrightarrow{KG}\,(x-2;y+0)$ et $\overrightarrow{CK}\,(2+4;0+1)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{KG}\,(x-2;y)$ et $\overrightarrow{CK}\,(6;1)$. Le critère de colinéarité nous permet d'écrire que $(x-2)\times 1-y\times 6=0$ qu'on peut réécrire $x-6y-2=0$.(L'équation a été multiplié par 3 pour retirer les fractions.)

   Ainsi les coordonnées de G sont solutions du système $\left\{\begin{array}{r}25x-6y=26\\ x-6y=2\end{array}\right.$ qu'il nous faut résoudre. Il est équivalent aux systèmes suivants : $\left\{\begin{array}{r} 24x = 26 - 2 \\ x - 6y = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x = 1 \\ 1 - 6y = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{r} x = 1 \\ 6y = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -\dfrac{1}{6} \end{array}\right.$.

Les coordonnées de G sont donc $(1; -\frac{1}{6})$. On peut alors placer G sur la figure.

5) On appelle $(x_L; y_L)$ les coordonnées du point L. On a $\overrightarrow{AL}\,(x_L - 2; y_L - 4)$ et $\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\left(\frac{1}{4}(-6); \frac{1}{4}(-5)\right)$ c'est-à-dire $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$. On a donc $x_L - 2 = -\frac{3}{2}$ et $y_L - 4 = -\frac{5}{4}$ et les coordonnées de L sont $\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{4}\right)$.

Démontrer que les points B, G et L sont alignés revient à démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires. On a $\overrightarrow{BG}\left(-1; \frac{35}{6}\right)$ et $\overrightarrow{BL}\left(-\frac{3}{2}; \frac{35}{4}\right)$. On teste leur colinéarité : $-1 \times \frac{35}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{35}{6} = -\frac{35}{4} + \frac{35}{4} = 0$. Le test étant réussi les points B, G et L sont bien alignés.

Exercice 4 : *Y-a-t-il un problème?!*

En observant les deux figures on remarque qu'il s'agit de deux séries de quatre pièces, deux triangles et deux pièces en « L » qui sont réarrangées différement. Pourtant dans le deuxième arrangement il semble manquer un carreau du quadrillage?!

D'où cela peut-il venir?

Les pièces sont-elles identiques dans les deux arrangements? La réponse est oui,
il suffit de remarquer que les deux triangles de la première figure sont rectangles et en comptant les carreaux on peut vérifier que leurs côtés adjacents à l'hypothénuse mesurent respectivement 8 et 3 et 5 et 2... tout comme ceux de la deuxième figure.

Pour les pièces en « L » il suffit de compter les carreaux, là encore ce sont bien les mêmes pièces. Le trou vient du fait qu'on croit que les deux figures sont deux triangles identiques or ni l'une ni l'autre ne sont des triangles. Si on grossisait les défauts on obtiendrait deux figures qui ressembleraient à la figure ci-dessous.

Comment peut-on le monter? A l'aide du théorème de Thalès.

Si la figure du haut était bien un triangle d'après le théorème de Thalès on aurait : $\frac{8}{8+5} = \frac{3}{5}$ c'est-à-dire $\frac{40}{13} = 3$ or $\frac{40}{13} \approx 3,08...$ qui est différent de 3 donc puisque le parallèlisme nécéssaire au théorème est sûr (le quadrillage est carré) c'est la figure qui n'est pas un triangle. On pourrait vérifier de même que la seconde figure n'est pas non plus un triangle.