Corrigé Devoir Maison 1

Exercice 1 : *Equations*

1) Pour résoudre cette équation du second degré on calcule son discriminant :
$\Delta = 5^2 - 4\big(2 \times (-4)\big) = 57$, il est positif donc l'équation admet deux solutions qui sont
$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{57}}{2\times(-4)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{57}}{2\times(-4)},$$
$$x_1 = \frac{5+\sqrt{57}}{8} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{57}}{8}.$$
Les solutions de cette équation sont donc $\dfrac{5+\sqrt{57}}{8}$ et $\dfrac{5-\sqrt{57}}{8}$.

2) Pour résoudre cette équation du second degré on calcule son discriminant :
$\Delta = 5 - 4 \times (-1) = 9 = 3^2$, il est positif donc l'équation admet deux solutions qui sont
$$x_1 = \frac{-\sqrt{5}-3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{5}+3}{2}.$$
Les solutions de cette équation sont donc $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

3) L'équation de l'énoncé est équivalente aux équations suivantes :
$$\frac{3}{x+1} = x+2 \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} - (x+2) = 0 \Leftrightarrow \frac{3-x^2-3x-2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x^2-3x+1=0 \\ x \neq -1 \end{array}\right. .$$
Remarque : $A \Leftrightarrow B$ se lit « A est équivalent à B », on peut le traduire par « si A est vrai alors B est vrai et si B est vrai alors A est vrai ».

Il nous faut donc résoudre $-x^2-3x+1=0$. On a $\Delta = (-3)^2 - 4(-1) = 13$, qui est positif, et donc deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{-2} = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{-2} = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$. Ces deux solutions sont bien distinctes de -1 donc l'équation (de départ) admet deux solutions qui sont $\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$.

4) L'équation de l'énoncé est équivalente aux équations suivantes :
$$\frac{4}{-x+2} + \frac{2}{x-5} = 0 \Leftrightarrow \frac{4(x-5)+2(-x+2)}{(-x+2)(x-5)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-16}{(-x+2)(x-5)} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-16=0 \\ x \neq 2 \text{ et } x \neq 5 \end{array}\right. .$$
En effet pour que $(-x+2)(x-5) \neq 0$ il faut que $(-x+2) \neq 0$ ***et*** que $(x-5) \neq 0$.

Il nous faut donc résoudre $2x-16=0$ qui a pour solution $x=8$. 8 est différent de 5 et de 2 donc l'équation (de départ) admet comme solution 8.

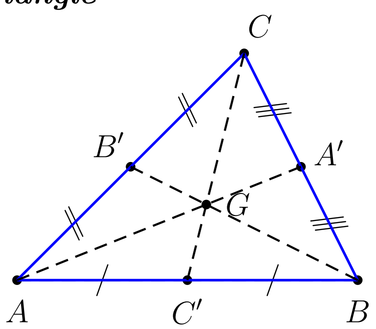
5) En suivant l'indication on veut factoriser le trinôme x^2+6x+8, pour cela on calcule ses racines avec le discriminant, $\Delta = 36 - 4 \times 8 = 4 = 2^2$. Le trinôme x^2+6x+8 admet donc deux racines qui sont $\dfrac{-6-2}{2} = -4$ et $\dfrac{-6+2}{2} = -2$ par conséquent on sait que l'on peut écrire $x^2+6x+8 = (x+2)(x+4)$.
Ainsi on a $\dfrac{x^2+6x+8}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{x+4}{x+3}$ ***dès que*** $x \neq -2$.

On peut alors réécrire l'équation : $\begin{cases} \dfrac{x+4}{x+3} + \dfrac{2x}{x-1} = 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$.

Il nous faut donc résoudre à présent $\dfrac{x+4}{x+3} + \dfrac{2x}{x-1} = 0$ qui est équivalente à
$\dfrac{(x+4)(x-1)+2x(x+3)}{(x+3)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2+9x-4}{(x+3)(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+9x-4=0 \\ x \neq 1 \text{ et } x \neq -3 \end{cases}$.
Il nous faut donc enfin résoudre $3x^2+9x-4=0$.
Son discriminant vaut $\Delta = 81 - 4 \times (-4) \times 3 = 129$. Cette équation admet donc deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-9-\sqrt{129}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{-9+\sqrt{129}}{6}$.
Et comme ces deux nombres sont bien différents de 1; -3 et -2 l'équation de départ admet deux solutions qui sont $\dfrac{-9-\sqrt{129}}{6}$ et $\dfrac{-9+\sqrt{129}}{6}$.

Exercice 2 : *Géométrie du triangle*

1) On réalise une figure.



2) On a $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$ et comme A' est le milieu de $[BC]$ on a par ailleurs $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$.
3) Grâce au résultat de la question précédente on peut réécrire $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ sous la forme $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0}$.
On a aussi $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$ et donc le point G existe bel et bien (il est entre A et A' et deux fois plus près de A' que de A).
4) On a $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{GA} + 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'}\right) = \overrightarrow{0}$ c'est-à-dire $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{0}$ puis $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ ce qui est la forme demandée.
Cette égalité vectorielle est caractéristique du centre de gravité par conséquent le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 3 : *Discriminant réduit*

1) On a $\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta'$. On a donc bien l'égalité demandée.
2) Le signe de Δ est donné par celui de Δ'. Ainsi, si $\Delta' > 0$, l'équation (E) admet deux solutions qui sont

$$x_1 = \frac{-2b'-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2b'+\sqrt{\Delta}}{2a},$$
$$x_1 = \frac{-2b'-2\sqrt{\Delta'}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2b'+2\sqrt{\Delta'}}{2a},$$
$$x_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}.$$

On a donc bien les solutions demandées.
Attention *vérifier que les deux valeurs proposées sont bien solutions de (E) ne suffit pas pour répondre à la question. En effet avec ce raisonnement on ne sait pas si ce sont les seules solutions de l'équation (E).*

3) *a)* On résout $-3x^2+4x+1=0$ à l'aide du discriminant réduit : $\Delta' = 2^2+1\times 3 = 7$ donc l'équation admet deux solutions qui sont
$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{7}}{-3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+\sqrt{7}}{-3},$$
$$x_1 = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{7}}{3}.$$
L'équation admet $\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ et $\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$ comme solutions.

b) On résout $x^2-6x+5=0$ à l'aide du discriminant réduit : $\Delta' = (-3)^2-1\times 5 = 4 = 2^2$ donc l'équation admet deux solutions qui sont
$$x_1 = \frac{3-2}{1} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+2}{1},$$
$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = 5.$$
L'équation admet 1 et 5 comme solutions.

Exercice 4 : *Equation à paramètre*

1) On a $(m-2)\times(-1)^2+5(-1)+7-m = m-2-5+7-m = 0$ donc -1 est bien une solution de l'équation et ce quelque soit m.

2) On a $(x+1)(ax+b) = ax^2+bx+ax+b$ donc pour que $(m-2)x^2+5x+7-m = (x+1)(ax+b)$ il faut identifier les coefficients de $(m-2)x^2+5x+7-m$ et de $ax^2+(a+b)x+b$ c'est-à-dire que
$$\begin{cases} a = m-2 \\ a+b = 5 \\ b = 7-m \end{cases}$$
Ce système admet $a=m-2$ et $b=7-m$ comme solution on peut donc écrire la factorisation $(m-2)x^2+5x+7-m = (x+1)\big((m-2)x+7-m\big)$.

3) De la factorisation on peut tirer l'autre racine : c'est la solution de $(m-2)x+7-m$, c'est donc $\dfrac{m-7}{m-2}$.

4) Il nous faut résoudre l'équation en m : $\dfrac{m-7}{m-2} = 10$ qui est équivalente à
$$\frac{m-7}{m-2}-10 = 0 \Leftrightarrow \frac{m-7}{m-2} - \frac{10(m-2)}{m-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-9m+13}{m-2} = 0 \begin{cases} -9m+13=0 \\ m \neq 2 \end{cases}.$$
L'équation $-9m+13=0$ admet $m=\dfrac{13}{9}$ comme solution et comme $\dfrac{13}{9}\neq 2$, $\dfrac{13}{9}$ est aussi solution de notre équation de départ.
Il faut prendre $m=\dfrac{13}{9}$ pour que la deuxième racine de $(m-2)x^2+5x+7-m=0$ soit 10.